Übungsstunde 11

Dienstag, 5. Dezember 2023 21:03

Recall: - $VP = NP$, d.h. wenn wir $\in NP$ zeigen wollen, so reicht es aus folgendes zu tun:
1. Angenommen w ist eine Lösung des Problems
2. Die Überprüfung von w muss in poly. Zeit zur Eingabe möglich sein

Intuition zu polynomiellen Reduktionen: $\leq_p \iff \leq_{EE}$ + Reduktion muss effizient sein (poly. Algo [A ist poly. Algo., falls $\text{Time}_A(n) \in O(n^c)$ für eine Konstante c])

Es gilt $NP \subseteq \mathcal{L}_R \subseteq \mathcal{L}_{RE}$.

Konjunktive Normalform ≡ Formeln in der Form $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_3 \vee \neg x_4)$

$SAT = \{ \Phi \mid \Phi$ ist eine erfüllbare KNF $\}$

Menge von Knoten $U \subseteq V$ s.d. jede Kante mind. 1 Endknoten in U hat

$VC = \{ (G,k) \mid G$ ist ein ungerichteter Graph mit einer Knotenüberdeckung der Mächtigkeit $\leq k \}$

$SCP = \{ (X, S, k) \mid X$ hat ein Set-Cover $C \subseteq S$ mit $|C| \leq k \}$

<u>Def.</u>: Sei X eine Menge, $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit $\bigcup_{s \in S} s = X$. Dann heißt $C \subseteq S$ Set-Cover von X, falls $X = \bigcup_{s \in C} s$.

Beh.: $VC \leq_p SCP$

Beweis: Sei $G = (V, E)$ eine Eingabe für VC und $k \in \mathbb{N}$. Wir definieren eine Eingabe für SCP wie folgt: Sei $E_v = \{ e \in E \mid v$ inzident zu $e \}$ die Menge der mit $v \in V$ inzidenten Kanten und sei $S_G = \{ E_v \mid v \in V \}$. Dann ist (E, S_G, k) unsere Eingabe für k.

Die Transformation ist offensichtlich in poly. Zeit durchführbar $(O(|V|^{|V|-1}))$

<u>Beh.</u>: $(G,k) \in VC \iff (E, S_G, k) \in SCP$

<u>Beweis</u>:

"⇒" Sei $U \subseteq V$ ein Vertex-cover mit $|U| \leq k$. Sei $\{v_1, \ldots, v_k\} = U$. Dann sind $\bigcup_{i=1}^{k} E_{v_i}$ die von U überdeckten Kanten. Klar gilt: $E_{v_i} \in S_G$ und $\bigcup_{i=1}^{k} E_{v_i} = E$. Also haben wir ein Set-cover der Größe $\leq k$ für (E, S_G, k)

"⇐" Angenommen $C \subseteq S_G$ sei ein Set-Cover, $|C| \leq k$. Also $\bigcup_{s \in C} s = E$. Damit bilden alle Knoten $v \in V$ s.d. $E_v \in C$ zusammen ein Vertex-Cover der Größe $\leq k$ in G.

□

Problem $\in P$ oder $\in NP$?

Large-Clique $= \{(G,k) \mid G=(V,E)$ ist ungerichteter Graph, der eine k-Clique der Größe $k \geq |V|/3$ enthält$\}$

Very-Large-Clique $= \{(G,k) \mid G=(V,E)$ " $k \geq |V|-3$ "$\}$

Lösung: Ob das Entscheidungsproblem $\in P$ oder $\in NP$ liegt, hängt davon ab wie viele Kandidaten (hier Mengen) wir überprüfen müssen. Intuitiv:

$\binom{n}{n-3} = \frac{1}{6}(n-2)(n-1)n \in \mathcal{O}(n^3)$

$\binom{n}{n/3} = n \cdot \ldots \cdot (\frac{2}{3}n+1) \approx n! \rightsquigarrow$ exponentiell, da $e^n \in \mathcal{O}(n!)$

Also $LC \in NP$, $VLC \in P$

Beh.: $VLC \in P$.

Beweis: Für einen Graphen mit n Knoten können wir einfach alle $\sum_{j=0}^{3} \binom{n}{n-j} \in \mathcal{O}(n^3)$ möglichen Teilmengen von min. $n-3$ Knoten darauf überprüfen, ob diese eine Clique bilden. Diese Überprüfung ist für jede der Teilmengen in Zeit $\mathcal{O}(n^2)$ möglich ($< n^2$ Kanten). Also poly. LZ von $\mathcal{O}(n^5)$ $\square$

Beh.: $LC \in NP$

Beweis: Angenommen $w=(G,k) \in LC$. D.h. G hat eine k-Clique, $k \geq |V|/3$.
Wir prüfen ob w tatsächlich eine Lösung ist, indem wir sukzessive alle Knoten durchlaufen und prüfen, ob es min. $|V|/3$ Knoten gibt, die paarweise miteinander verbunden sind. Diese Überprüfung ist in poly. LZ möglich, da wir max. n^2 Vergleiche durchführen. Somit ist $LC \in NP$ $\square$

Beh.: Vertex Cover ist NP vollständig.

Beweis: Angenommen Independent Set ist NP complete, Ind.Set = ist in einem ungerichteten Graphen $G=(V,E)$ ein kantenloser Teilgraph, also $V' \subseteq V$, s.d. $\forall v,w \in V': \{v,w\} \notin E$.

Independent Set $= \{(G,k) \mid G$ hat ein Ind.Set der Größe $\geq k\}$ (Komplement zu VC)

- Vertex Cover $\in NP$: Sei (G,k) eine Eingabe, welche in Vertex Cover liegt. Dann gibt es k' Knoten V' in G, welche ein Vertex Cover bilden. Klar: $|V'| \leq |G|$. Gegeben V', so können wir alle Kanten in G durchlaufen und prüfen, ob jede davon min. einen Endpunkt in V' hat. Dies hat Laufzeit $|E| \cdot |V'|$, was polynomiell in $|G|$ ist.

- Independent Set $\leq_p$ Vertex Cover

  Sei (G,k) eine Eingabe für Independent Set. Dann ist (G',k') eine Eingabe für Vertex Cover, wobei $G' = G$ und $k' = n-k$. $(n = |V|)$

  Beh.: $(G,k) \in$ Independent Set $\Leftrightarrow$ $(G',k') \in$ VertexCover

  Beweis: "$\Rightarrow$" G hat ein Ind.Set S, $|S| = k$. Dann ist $V' = V \setminus S$ ein VC, da keine Kante in G beide Eckpunkte in S haben kann

  "$\Leftarrow$" G' hat ein VC V', $|V'| = n-k$. Dann gibt es keine Kante in $V \setminus V' =: S$, $|S| = k$ $\square$

  Da die Konstruktion in poly. LZ möglich ist, folgt die Behauptung. $\square$

Beh.: Sei

Undirected Hamilton Cycle = $\{ G = (V,E) \mid$ Gibt es einen Kreis, der jeden Knoten in G genau einmal besucht ? $\}$
UHC

gerichteter Graph

Directed Hamilton Cycle = $\{ D = (V,A) \mid$ " gerichteten Kreis, " $\}$
DHC

Dann ist UHC $\leq_p$ DHC

Beweis: Sei G eine Eingabe für UHC. Wir konstruieren G' wie folgt:
$V(G') = V(G)$. Für jede Kante $\{v,w\} \in E(G)$ fügen wir die gerichteten Kanten (v,w) und (w,v) in $A = E(G')$ ein. Die Konstruktion ist sicher in poly. LZ in $|G|$ möglich.

"$\Rightarrow$" Angenommen $(u_1, \dots, u_n)$ ist ein UHC in G. So ist dies auch ein DHC.

"$\Leftarrow$" Jeder DHC ist auch ein UHC. $\square$ $\square$

Beh.: Dreifach-SAT ist NP-vollständig (Dreifach-SAT ≡ alle KNF mit min. 3 versch. erfüllenden Belegungen)

Beweis: 1. Da Dreifech-SAT $\subseteq$ SAT, folgt: Dreifach-SAT $\in NP$

2. Wir zeigen SAT $\leq_p$ Dreifach-SAT

Sei $F = C_1 \wedge \ldots \wedge C_m$ eine KNF über $\{x_1, \ldots, x_n\}$, $C_i = L_{i_1} \vee \ldots \vee L_{i_k}$

Wir definieren $\Phi = F \wedge D_1 \wedge D_2 \wedge D_3$, wobei $D_1 = y_1 \vee y_2$, $D_2 = y_1 \vee \overline{y}_2$, $D_3 = \overline{y}_1 \vee y_2$

mit y_1, y_2 neuen Variablen, welche nicht in F vorkommen. Die Konstruktion ist sicherlich in poly. LZ möglich.

<u>Beh.:</u> $F \in SAT \iff \Phi \in$ Dreifach-SAT

<u>Beweis:</u> "$\Rightarrow$" Angenommen $F \in SAT$. D.h. es existiert eine erfüllende Belegung α für F. Dann sind $(\alpha, \overset{y_1}{1}, \overset{y_2}{0})$, $(\alpha, 0, 1)$, $(\alpha, 1, 1)$ drei erfüllende Belegungen für Φ, also $\Phi \in$ Dreifach-SAT.

"$\Leftarrow$" Angenommen $\Phi \in$ Dreifach-SAT. D.h. es existiert eine erfüllende Belegung β für Φ. Aber falls Φ erfüllt ist, so <u>muss</u> F auch erfüllt sein über $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Also $F \in SAT$ $\square$

Da SAT NP-Schwer ist, folgt Dreifach-SAT ist NP-complete $\blacksquare$