Übungsstunde 9

Dienstag, 22. November 2022 20:32

→ Satz 6.5 wurde schon häufiger in Klausuren abgefragt

Intuition zu polynomiellen Reduktionen: $\leq_p$ $\Leftrightarrow$ $\leq_{EE}$ + Reduktion muss effizient sein (poly. Algo [A ist poly. Algo., falls $Time_A(n) \in \mathcal{O}(n^c)$ für eine Konstante c])

Konjunktive Normalform ≡ Formeln in der Form $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_3 \vee \neg x_4)$

$SAT = \{ \Phi \mid \Phi$ ist eine erfüllbare KNF $\}$

Menge von Knoten $U \subseteq V$ s.d. jede Kante mind. 1 Endknoten in U hat

$VC = \{ (G,k) \mid G$ ist ein ungerichteter Graph mit einer Knotenüberdeckung der Mächtigkeit $\leq k \}$

$SCP = \{ (X,S,k) \mid X$ hat ein Set-Cover $C \subseteq S$ mit $|C| \leq k \}$

Def.: Sei X eine Menge, $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit $\bigcup_{s \in S} s = X$. Dann heißt $C \subseteq S$ Set-Cover von X, falls $X = \bigcup_{s \in C} s$.

Beh.: $VC \leq_p SCP$

Beweis: Sei $G = (V,E)$ eine Eingabe für VC und $k \in \mathbb{N}$. Wir definieren eine Eingabe für SCP wie folgt: Sei $E_v = \{ e \in E \mid v$ inzident zu $e \}$ die Menge der mit $v \in V$ inzidenten Kanten und sei $S_G = \{ E_v \mid v \in V \}$. Dann ist (E, S_G, k) unsere Eingabe für k.

Die Transformation ist offensichtlich in poly. Zeit durchführbar $(\mathcal{O}(|V|^{|V|-1}))$

Beh.: $(G,k) \in VC \Leftrightarrow (E, S_G, k) \in SCP$

Beweis:

"⇒" Sei $U \subseteq V$ ein Vertex-cover mit $|U| \leq k$. Sei $\{v_1, \ldots, v_k\} = U$. Dann sind $\bigcup_{i=1}^{k} E_{v_i}$ die von U überdeckten Kanten. Klar gilt: $E_{v_i} \in S_G$ und $\bigcup_{i=1}^{k} E_{v_i} = E$. Also haben wir ein Set-cover der Größe $\leq k$ für (E, S_G, k)

"⇐" Angenommen $C \subseteq S_G$ sei ein Set-Cover, $|C| \leq k$. Also $\bigcup_{s \in C} s = E$. Damit bilden alle Knoten $v \in V$ s.d. $E_v \in C$ zusammen ein Vertex-Cover der Größe $\leq k$ in G.

□

Problem $\in P$ oder $\in NP$?

Large-Clique $= \{(G,k) \mid G=(V,E)$ ist ungerichteter Graph, der eine k-Clique der Größe $k \geq |V|/3$ enthält$\}$

Very-Large-Clique $= \{(G,k) \mid G=(V,E)$ " $k \geq |V|-3$ "$\}$

Lösung: Ob das Entscheidungsproblem $\in P$ oder $\in NP$ liegt, hängt davon ab wie viele Kandidaten (hier Mengen) wir überprüfen müssen. Intuitiv:

$$\binom{n}{n-3} = \frac{1}{6}(n-2)(n-1)n \in \mathcal{O}(n^3)$$

$$\binom{n}{n/3} = n \cdot \ldots \cdot (\tfrac{2}{3}n+1) \approx n! \rightsquigarrow \text{exponentiell, da } e^n \in \mathcal{O}(n!)$$

Also $LC \in NP$, $VLC \in P$

Beh.: $VLC \in P$.

Beweis: Für einen Graphen mit n Knoten können wir einfach alle $\sum_{j=0}^{3} \binom{n}{n-j} \in \mathcal{O}(n^3)$ möglichen Teilmengen von min. $n-3$ Knoten darauf überprüfen, ob diese eine Clique bilden. Diese Überprüfung ist für jede der Teilmengen in Zeit $\mathcal{O}(n^2)$ möglich ($< n^2$ Kanten). Also poly. LZ von $\mathcal{O}(n^5)$ □

Beh.: $LC \in NP$

Beweis: Angenommen $w=(G,k) \in LC$. D.h. G hat eine k-Clique, $k \geq |V|/3$.
Wir prüfen ob w tatsächlich eine Lösung ist, indem wir sukzessive alle Knoten durchlaufen und prüfen, ob es min. $|V|/3$ Knoten gibt, die paarweise miteinander verbunden sind. Diese Überprüfung ist in poly. LZ möglich, da wir max. n^2 Vergleiche durchführen. Somit ist $LC \in NP$ □