Übungsstunde 11

Dienstag, 6. Dezember 2022 18:17

Aufgabe: $G = (\{S, X_0, X_1, X_2\}, \{a, b\}, P, S)$, $P = \{S \to X_0 aa,\ X_0 \to aX_0 \mid bX_1,$
$X_1 \to aX_1 \mid bX_2,\ X_2 \to aX_2 \mid bX_0 \mid \lambda\}$. Welche Sprache erzeugt G?

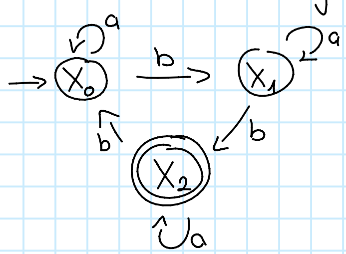
Lösung: $L(G) = \{waa \mid w \in \{a,b\}^*,\ |w|_b \bmod 3 = 2\}$

$S \to X_0 aa \Rightarrow L(G) \subseteq \{a,b\}^* \cdot \{aa\}$

$X_i \to aX_i$ für $i = 1,2,3 \Rightarrow$ beliebige Anzahl von a

$X_i \to bX_{(i+1) \bmod 3}$ und $X_2 \to \lambda \Rightarrow |w|_b \bmod 3 = 2\}$

Aliter: Konvertiere die Regeln X_1, X_2, X_3 in einen äquivalenten EA

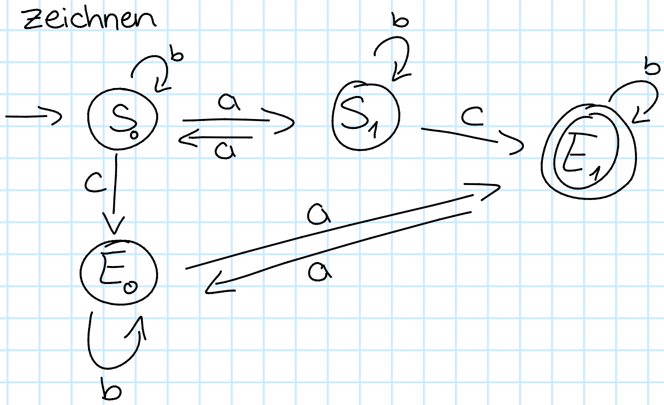


Aufgabe: Gib eine reguläre Grammatik für $L = \{xcy \mid x,y \in \{a,b\}^* \wedge \underline{|x|_a + |y|_a} \bmod 2 = 1\}$

$\Rightarrow |x|_a \equiv 0,\ |y|_a \equiv 1$

$|x|_a \equiv 1,\ |y|_a \equiv 0$

Lösung: 1. EA zeichnen



2. $L_{EA} = \mathcal{L}_3$ ausnutzen

$G = (\{S_0, S_1, E_0, E_1\}, \{a, b, c\}, P, S_0)$,

$P = \{ S_0 \to aS_1 \mid bS_0 \mid cE_0$

$S_1 \to aS_0 \mid bS_1 \mid cE_1$

$E_0 \to aE_1 \mid bE_0$

$E_1 \to aE_0 \mid bE_1 \mid \underline{\underline{\lambda}} \}$

Aufgabe: Allgemeine Grammatik für $L = \{a^n b^{2n} c^{3n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ über $\Sigma_T = \{a,b,c\}$

Lösung: 1. Wir zeigen, dass L nicht kontextfrei ist

Angenommen L sei kontextfrei und sei n die durch das PL gegebene Konstante.

Wähle $z = a^n b^{2n} c^{3n}$, wobei $\underline{z \in L}$. Klar ist $n \leq |z|$. Also existiert eine Zerlegung $z = uvwxy$. Da $|vwx| \leq n$ und $|vx| \geq 1 \Rightarrow vwx = a^j b^k$ oder $vwx = b^j c^k$ mit $j,k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ und $j+k \geq 1$.

Also: $uv^2wx^2y \in \underbrace{\{a^{n+f} b^{2n+g} c^{3n}, a^n b^{2n+f} c^{3n+g}\}}_{=:I}$ mit $f,g \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ und $f+g \geq 1$.

Aber $I \cap L = \emptyset$ ↯ Widerspruch zum PL. $\square$

2. Da L nicht regulär ist, führt eine Konstruktion via eines EA nicht zwingend zum Ziel.

$G = (\{S, A, X\}, \{a,b,c\}, P, S)$

$P = \{S \to ASccc \mid X$ ← 3 mal so viele ccc wie A

$AX \to aXbb$ pro ccc wird je ein bb und ein a erzeugt

$Aa \to aA$ erzeugte a wird nach links verschoben, s.d. wieder in a und bb erzeugt werden kann

$X \to \lambda\}$ $\square$

Aufgabe: Kontextfreie Grammatik für $L = \{u\#v \mid u,v \in \{a,b\}^*, |u|_a = 2 \cdot |v|_b\}$ über $\Sigma_T = \{a,b,\#\}$

Lösung: $G = (\{S, A, B\}, \{a,b,\#\}, P, S)$

$P = \{S \to ASB \mid aAaSb \mid \#$

$A \to Ab \mid \lambda$

$B \to Ba \mid \lambda\}$

Idee: Wort aus der Mitte heraus konstruieren

Beh.: Dreifach-SAT ist NP-vollständig (Dreifach-SAT $\equiv$ alle KNF mit min. 3 versch. erfüllenden Belegungen)

Beweis: 1. Da Dreifach-SAT $\subseteq$ SAT, folgt: Dreifach-SAT $\in$ NP

2. Wir zeigen SAT $\leq_p$ Dreifach-SAT

Sei $F = C_1 \wedge \dots \wedge C_m$ eine KNF über $\{x_1, \dots, x_n\}$, $C_i = L_{i_1} \vee \dots \vee L_{i_k}$

Wir definieren $\Phi = F \wedge D_1 \wedge D_2 \wedge D_3$, wobei $D_1 = y_1 \vee y_2$, $D_2 = y_1 \vee \bar{y}_2$, $D_3 = \bar{y}_1 \vee y_2$

mit y_1, y_2 neuen Variablen, welche nicht in F vorkommen. Die Konstruktion ist sicherlich in poly. LZ möglich.

Beh.: $F \in SAT \iff \Phi \in$ Dreifach-SAT

Beweis: "$\Rightarrow$" Angenommen $F \in SAT$. D.h. es existiert eine erfüllende Belegung α für F.
Dann sind $(\alpha, \overset{y_1}{1}, \overset{y_2}{0}), (\alpha, 0, 1), (\alpha, 1, 1)$ drei erfüllende Belegungen für Φ, also $\Phi \in$ Dreifach-SAT.

"$\Leftarrow$" Angenommen $\Phi \in$ Dreifach-SAT. D.h. es existiert eine erfüllende Belegung β für Φ. Aber falls Φ erfüllt ist, so <u>muss</u> F auch erfüllt sein über $\{x_1, \dots, x_n\}$. Also $F \in SAT$ $\square$

Da SAT NP-Schwer ist, folgt Dreifach-SAT ist NP-complete $\blacksquare$