Übungsstunde 9

Freitag, 17. November 2023 13:38

Aufgabe: Alternativ Lösung zu $L_\infty^c \in \mathcal{L}_{RE}$

Lösung: Wir benützen ein Diagonalisierungsargument und konstruieren eine det. TM A s.d. $L(A) = L_\infty^c$. A arbeitet auf einer Eingabe w wie folgt

1. A prüft ob $w \neq Kod(M)$ für eine TM M. Dann akzeptiert A.
2. $w = Kod(M)$. A konstruiert systematisch (wie Diagonale) alle Paare $(i,j) \in \mathbb{N}_{>0}^2$. Für jedes Paar (i,j) generiert A das kanonisch i-te Wort $w_i \in \{0,1\}^*$ und simuliert j Berechnungsschritte von M auf w_i. Falls für ein Paar (k,l) die TM w_k in l Schritten akzeptiert, so akzept. M und A akzeptiert w. Ansonsten akzeptiert A die Eingabe w nicht, da A ∞-Lange arbeitet

$\square$

Es ist trivialerweise offensichtlich, dass $L(A) = L_\infty^c$

Beh.: $L = \{Kod(M_1)\#Kod(M_2)\#k \mid M_1, M_2 \text{ TM über } \Sigma \text{ und } \Sigma^k \not\subseteq L(M_1) \cup L(M_2)\} \notin \mathcal{L}_{RE}$.

Beweis: Wir benutzen, dass $L^c \in \mathcal{L}_{RE}$. Dies kann man via eines Diagonalisierungsarguments ähnlich zur vorigen Aufgabe zeigen und ist dem emsigen Leser überlassen (Sessionsprüfung HS2020 A4).

Wir zeigen $L_u^c \leq_{EE} L$, da dann $L_u^c \leq_R L$ und $L_u^c \notin \mathcal{L}_{RE}$ gilt. Wir beschreiben eine TM S, die eine Funktion $f_S : \{0,1,\#\}^* \longrightarrow (\{0,1,\#\} \cup \mathbb{N})^*$ berechnet, s.d.

$$x \in L_u^c \iff f_S(x) \in L$$

Sei $x \in \{0,1,\#\}^*$ die Eingabe. S prüft ob $x = Kod(M)\#w$ für eine TM M und ein $w \in \{0,1\}^*$.
Falls nicht, so wird $f_S(x) = Kod(M_\emptyset)\#Kod(M_\emptyset)\#1$ ausgegeben, wobei $M_\emptyset$ eine TM s.d. $L(M_\emptyset) = \emptyset$.
Falls doch, so wird $f_S(x) = Kod(M_w)\#Kod(M_w)\#1$ ausgegeben, wobei M_w eine TM ist, welche ihre eigene Eingabe ignoriert, M auf w simuliert und die Ausgabe übernimmt.

<u>Beh.:</u> $x \in L_u^c \iff f_S(x) \in L$

<u>Beweis:</u> <u>Fall 1:</u> $w \notin KodTM \cdot \{\#\} \cdot \{0,1\}^*$ (i.e. $w \in L_u^c$) $\implies f_S(w) = Kod(M_\emptyset)\#Kod(M_\emptyset)\#1 \in L$, da $\Sigma^1 \not\subseteq \emptyset = \emptyset \cup \emptyset$

<u>Fall 2:</u> $x = Kod(M)\#w$ für $Kod(M) \in KodTM$, $w \in \{0,1\}^*$.

$$x \in L_u^c \iff w \notin L(M) \iff L(M_w) = \emptyset \iff \Sigma^1 \not\subseteq L(M_w) \cup L(M_w)$$
$$\iff f_S(x) \in L$$

$\square$

Da für jede Sprache $\tilde{L}$: $\tilde{L}, \tilde{L}^c \in \mathcal{L}_{RE} \iff \tilde{L} \in \mathcal{L}_R$ gilt, folgt $L \notin \mathcal{L}_{RE}$ $\square$

Aufgabe: a) $L_H \le_{EE} L_u$

b) $L_u \le_R L_{EQ} = \{ Kod(M) \# Kod(\bar{M}) \mid L(M) = L(\bar{M}) \}$

Lösung: a) Wir konstruieren eine TM A, welche immer hält und jede beliebige Eingabe $w \in \{0,1,\#\}^*$ in eine Eingabe $A(w) \in \{0,1,\#\}^*$ generiert s.d. $w \in L_H \iff A(w) \in L_u$

A arbeitet auf w wie folgt:

Falls $w \neq Kod(M)\#x$ für eine TM M und $x \in \Sigma^*_{bool}$, so ist $A(w) = \lambda$ $(\notin L_u)$

Andernfalls konstruiert A aus M eine TM M', welche eine Kopie von M ist, wobei zstl. alle Transitionen, welche in M zu q_{reject} führen, in M' zu q_{accept} führen und $A(w) = Kod(M')\#x$

Bemerke, M' hält $\iff$ M hält. A hält immer!

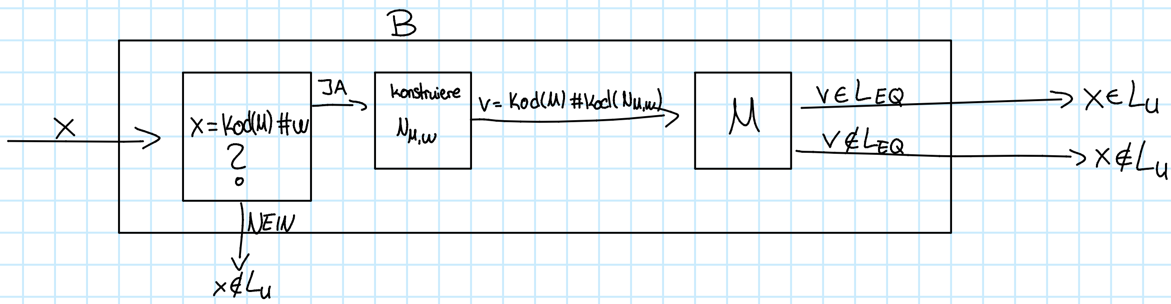
Beh.: $w \in L_H \iff A(w) \in L_u$

Beweis: $w \in L_H \iff w = Kod(M)\#x$ und M hält auf x

$\iff x \in L(M')$

$\iff A(w) = Kod(M')\#x \in L_u$ $\square$

b) Sei M eine TM, welche L_{EQ} entscheidet.



Es ist klar, dass B in endlicher Zeit terminiert.

$N_{M,w}$ arbeitet wie folgt: Auf jeder Eingabe y für $N_{M,w}$ prüft sie ob $y = w$.

Falls $y \neq w$, so arbeitet sie wie M auf y. Falls $y = w$, so akzeptiert sie.

Wir zeigen nun: $L(B) = L_u$:

Falls $y \neq w$: $y \in L(M) \iff y \in L(N_{M,w})$

Falls $y = w$, so ist $w \in L(N_{M,w})$, folglich $[L(M) = L(N_{M,w}) \iff w \in L(M)]$

Folglich: $v \in L_{EQ} \iff Kod(M)\#w \in L_u$ $\square$

Aufgabe: a) $L_u \leq_{EE} L_{union}$

b) $L_{union} \leq_{EE} L_u$

c) $L_u^C \leq_{EE} L_{diag}$

Beweis:

a) Wir konstruieren eine TM A, welche immer hält und jede beliebige Eingabe $w \in \{0,1,\#\}^*$ in eine Eingabe $A(w) \in \{0,1,\#\}^*$ generiert s.d. $w \in L_u \iff A(w) \in L_{union}$

A arbeitet auf w wie folgt:

Falls $w \neq Kod(M)\#x$ für eine TM M und $x \in \Sigma^*_{bool}$, so ist $A(w) = \lambda$ ($\notin L_{union}$)

Andernfalls ist $A(w) = Kod(M)\#Kod(M)\#w$.

Beh.: $w \in L_u \iff A(w) \in L_{union}$

Beweis: $w \in L_u \iff w = Kod(M)\#x$ und M akzeptiert x.

$\iff Kod(M)\#Kod(M)\#x \in L_{union}$ $\square$

b) Wir konstruieren eine TM A, welche immer hält und jede beliebige Eingabe $w \in \{0,1,\#\}^*$ in eine Eingabe $A(w) \in \{0,1,\#\}^*$ generiert s.d. $w \in L_{union} \iff A(w) \in L_u$

A arbeitet auf w wie folgt:

Falls $w \neq Kod(M)\#Kod(M')\#x$ für eine TM M und $x \in \Sigma^*_{bool}$, so ist $A(w) = \lambda$ ($\notin L_u$)

Andernfalls ist $A(w) = Kod(A)\#x$, wobei A eine TM, welche M & M' parallel auf x laufen lässt und akzeptiert falls M oder M' akzeptieren.

Beh.: $w \in L_{union} \iff A(w) \in L_u$

Beweis: $w \in L_{union} \iff w = Kod(M)\#Kod(M')\#x$ und $x \in L(M) \cup L(M')$

$\iff x \in L(A) \iff Kod(A)\#x \in L_u$ $\square$

b) Wir konstruieren eine TM A, welche immer hält und jede beliebige Eingabe $w \in \{0,1,\#\}^*$ in eine Eingabe $A(w) \in \{0,1\}^*$ generiert s.d. $w \in L_u^C \iff A(w) \in L_{diag}$

A arbeitet auf w wie folgt:

Falls $w \neq Kod(M)\#x$ für eine TM M und $x \in \Sigma^*_{bool}$, so berechnet A die Kodierung einer TM M' die alle Eingaben verwirft, berechnet den Index j, s.d. $M' = M_j$, das kanonische Wort w_j und gibt $A(w) = w_j$ aus.

Andernfalls generiert A die Kodierung einer TM M', welche wie folgt arbeitet:

Simuliere unabhängig von der Eingabe M auf x

Weiter berechnet A den Index i von M' und gibt $A(w) = w_i$ aus.

Beh.: $w \in L_u^c \iff A(w) \in L_{diag}$

Beweis: "$\Rightarrow$" Fall 1: $w \neq Kod(M)\#x \Rightarrow A(w) = w_j$ und M_j verwirft w_j

$\Rightarrow w_j \in L_{diag}$

Fall 2: $w = Kod(M)\#x \Rightarrow x \notin L(M) \Rightarrow L(M') = \emptyset$

$\Rightarrow w_i \notin L(M_i) = L(M) \Rightarrow w_i \in L_{diag}$

"$\Leftarrow$" $w \notin L_u^c$ (i.e. $w \in L_u$). Also $w = Kod(M)\#x$ & M akzeptiert x.

Folglich: $L(M') = \Sigma_{bool}^*$. Insbesondere: $w_i \in L(M_i) = L(M')$

$\Rightarrow w_i \notin L_{diag}$ $\square$