Übungsstunde 6

Freitag, 27. Oktober 2023 08:42

Prüfungsstoff: Bis und mit countability!

$\mathcal{L}_{RE} = \{ L(M) \mid M \text{ ist eine TM} \}$

Diagonalisierungsmethode

Beh.: $L_1 := \{ w \in \{0,1\}^* \mid w = w_i \text{ für ein } i \in \mathbb{N}_{\geq 1} \text{ und } M_{\lceil i/2 \rceil} \text{ akzeptiert } w \text{ nicht} \} \notin \mathcal{L}_{RE}$

Beweis: Per Widerspruch

Angenommen $L_2 \in \mathcal{L}_{RE}$. Dann $\exists$ TM s.d. $L(M) = L_1$. Insbesondere $\exists i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ s.d. $M_i = M$.

Wort in Abhängigkeit von TM in Sprache wählen!

Also $L_2 = L(M) = L(M_i)$. Betrachte das Wort w_{2i}. Dann gilt:

Fall 1: $w_{2i} \in L(M_i) \Rightarrow M_i$ akzeptiert $w_{2i} \Rightarrow w_{2i} \notin L_2$, da $M_{\lceil 2i/2 \rceil} = M_i$ akzeptiert w_{2i}

$\Rightarrow w_{2i} \notin L_2 = L(M_i)$ ↯

Fall 2: $w_{2i} \notin L(M_i) \Rightarrow M_i$ akzeptiert w_{2i} nicht $\Rightarrow w_{2i} \in L_2 = L(M_i)$ ↯

Somit war unsere Annahme falsch und $L_2 \notin \mathcal{L}_{RE}$. □

Der Beweis basiert auf der Idee, dass in der Liste jede TM erfasst ist und daher auch die angenommene Maschiene für die Sprache (i.e. $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $i \mapsto \lceil i/2 \rceil$ ist surjektiv). Daher führt dasselbe Argument nicht zum Widerspruch wenn wir nicht-surjektive Abbildungen haben).

Weitere Aufgaben

Beh.: Die Sprache $\mathcal{L}_1 = \{ u\#v\#w \mid u,v,w \in \{0,1\}^+ \text{ und } Nummer(u) \cdot Nummer(v) = Nummer(w) \}$ ist nicht regulär

Beweis: Via Lemma 3.3. Angenommen L_1 sei regulär. Dann gibt es einen endlichen Automaten $A = (Q, \{0,1,\#\}, \delta, q_0, F)$ s.d. $L(A) = L_1$. Sei $m = |Q|$. Betrachte die Wörter

$1\#1\#,\ 1^2\#1\#,\ 1^3\#1\#, \ldots, 1^{m+1}\#1\#$

Da dies $m+1$ Wörter sind, existiert nach dem Schubfachprinzip $i,j \in [m+1]$ mit $i<j$ s.d. $\hat{\delta}(q_0, 1^i\#1\#) = \hat{\delta}(q_0, 1^j\#1\#)$. Nach Lemma 3.3 gilt nun: $\forall z \in \{0,1,\#\}$:

$$1^i\#1\#z \in L_1 \iff 1^j\#1\#z \in L_1.$$

Die Wahl von $z = 1^i$ führt aber zu einem Widerspruch ↯ □

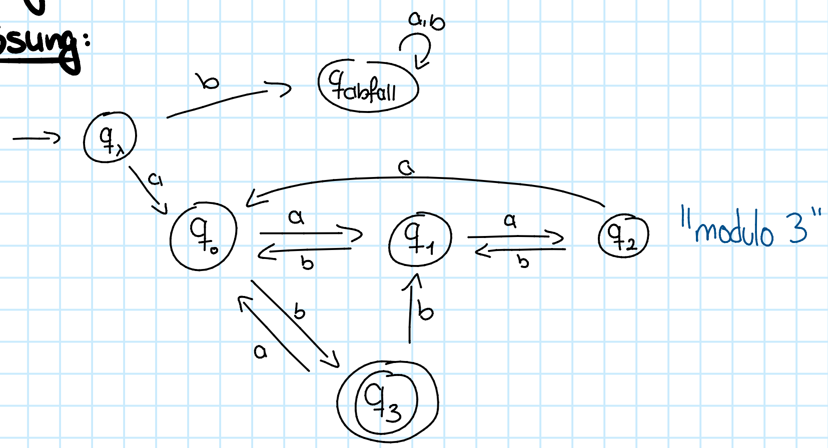
Beh.: Die Sprache $L_2 = \{0^p \mid p \text{ ist eine Primzahl}\}$ ist nicht regulär.

Beweis: Wir zeigen indirekt mit Hilfe des Pumping-Lemmas. Angenommen L_2 sei regulär.
Nach dem PL $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall w \in \{0\}^*$ mit $|w| \geq n_0$ in drei Teile y, x, z zerlegen lässt, s.d. 1) $|yx| \leq n_0$, 2) $|x| \geq 1$ und 3) $\{yx^kz \mid k \in \mathbb{N}\} =: M \subseteq L$ oder $M \cap L = \emptyset$

Sei $w = 0^p$ mit $p \geq n_0$ eine Primzahl. Dann muss es eine Zerlegung $w_i = yxz$ welche 1) - 3) erfüllt geben. Mit 1) & 2) folgt: $1 \leq |x| \leq n_0$.
Da $w \in L_2 \Rightarrow M \subseteq L_2$. Wir wählen $k = p+1$. Dann ist $yx^kz = 0^{p+(k-1)m} = 0^{p+pm} = 0^{p(m+1)} \notin L_2$, da $p(m+1)$ nicht prim ↯ $\square$

Aufgabe: Konstruiere einen EA für $L = \{awb \mid w \in \{a,b\}^* \text{ und } |w|_a \bmod 3 = |w|_b \bmod 3\}$

Lösung:



Von letzter Woche:

Aufgabe: Jeder EA der $L_3 = \{w \in \{a,b\}^* \mid (|w|_a + 2|w|_b) \bmod 3 = 1 \text{ oder } w \text{ endet mit } b\}$ akzeptiert, mindestens 5 Zustände hat.

Beweis: Wir verwenden Lemma 3.3. Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein EA mit $L(M) = L_3$.
Seien $x, y \in \{a,b\}^*$ $x \neq y$, s.d. $\hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, y)$. Dann gilt $\forall z \in \{a,b\}^*$:

$$xz \in L(M) \iff yz \in L(M)$$

Wir konstruieren nun 5 paarweise verschiedene Wörter $w_i \in \{a,b\}^*$, $1 \leq i \leq 5$, s.d. für ein $z \in \{a,b\}^*$ folgendes gilt: $\neg(w_iz \in L(M) \iff w_jz \in L(M))$ (I) für $1 \leq i < j \leq 5$.
Nach obigem Lemma müssen dann alle w_i, $1 \leq i \leq 5$ in verschiedenen Startzuständen liegen.
(i.e. $\hat{\delta}(q_0, w_i) \neq \hat{\delta}(q_0, w_j)$, $1 \leq i < j \leq 5$).

Wähle $w_1 = \lambda$, $w_2 = a$, $w_3 = b$, $w_4 = ab$, $w_5 = aa$

	w_2	w_3	w_4	w_5
w_1	λ	λ	λ	aa
w_2	/	aa	aaa	λ
w_3	/	/	a	λ
w_4	/	/	/	λ

Einträge sind z

Damit haben wir 5 paarweise verschiedene Wörter mit Eigenschaft (I), woraus folgt, dass M mindestens 5 Zustände hat. $\square$

Beh.: $L = \{0^n 1^m \mid n,m \in \mathbb{N}_{\geq 0},\ n \leq m \leq 2n\}$ ist nicht regulär.

Beweis: Benutze Lemma 3.3

Sei L regulär. Dann $\exists$ EA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit $L(A) = L$. Betrachte $(\lambda, 0, \dots, 0^{|Q|})$.

Nach dem Schubfachprinzip existieren $i,j \in \{0,\dots,m\}$ mit $i<j$ s.d. $\delta^*(q_0, 0^i) = \delta^*(q_0, 0^j)$.

Nach Lemma 3.3. gilt $\forall z \in \{0,1\}^*:\ 0^i z \in L \iff 0^j z \in L$.

Wähle $z = 1^i$. Dann gilt $0^i 1^i \in L$, aber $0^j 1^i \notin L$, da $j > i$ ↯ $\square$

Von vorletzter Woche: Wir zeigen mittels dem PL & Lemma 3.3, dass $L_3 = \{0^{n\lceil\sqrt{n}\rceil} \mid n \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär ist.

PL: Angenommen L sei regulär. Seien $w_1, w_2, \dots$ die Wörter von L in kanon. Reihenfolge.

Betrachte $w_{n_0^2} = 0^{n_0^2\lceil\sqrt{n_0^2}\rceil} \in L_3$. Da $|w_{n_0^2}| \geq n_0$ existiert die übliche Zerlegung $w_{n_0^2} = yxz$.

Wegen $|yx^2z| = |yxz| + |x|$ gilt: $|yxz| \overset{|x|>0}{<} |yx^2z| \overset{|x|\leq n_0}{\leq} |yxz| + n_0$.

Das nächste Wort in L_3 nach $w_{n_0^2}$ ist: $w_{n_0^2+1}$ und daher gilt:

$$\begin{aligned} |w_{n_0^2+1}| - |w_{n_0^2}| &= (n_0^2+1)\lceil\sqrt{n_0^2+1}\rceil - n_0 \cdot \lceil\sqrt{n_0^2}\rceil \\ &= (n_0^2+1)\lceil\sqrt{n_0^2+1}\rceil - n_0^2\, n_0 \\ &> (n_0^2+1)\, n_0 - n_0^2 \cdot n_0 = n_0 \end{aligned}$$

Das nächste Wort in L_3 wächst um min. $n_0 + 1$!

Somit gilt für $|yx^2z| \leq |yxz| + n_0 = |w_{n_0^2}| + n_0 < |w_{n_0^2+1}|$

Also ist yx^2z länger als $w_{n_0^2}$, aber kürzer als $w_{n_0^2+1}$ $\Rightarrow yx^2z \notin L_3$ ↯

Hier war wichtig, dass unser Wort Länge $\geq n_0$ hat und dass der Abstand zum nächsten Wort so groß ist, dass man es durch 1-mal (bzw. 2-mal) Pumpen nicht erreichen kann

Lemma 3.3: Definiere $w_n = 0^{n\lceil\sqrt{n}\rceil}$ und $v_n = 0^{|w_{n+1}| - |w_n|}$

Angenommen L_3 sei regulär. Dann gibt es einen endlichen Automaten $A = (Q, \{0,1,\#\}, \delta, q_0, F)$ s.d. $L(A) = L_3$. Sei $m = |Q|$. Betrachte die Wörter w_n mit $n \in M := \{k^2 \mid k \in \{2, \dots, m+2\}\}$. Da dies $m+1$ Wörter sind, existiert nach dem Schubfachprinzip $i^2, j^2 \in M$ mit $i < j$ und s.d. $\hat{\delta}(q_0, w_{i^2}) = \hat{\delta}(q_0, w_{j^2})$. Nach Lemma 3.3 gilt nun:

$$w_{i^2} v_{i^2} \in L_3 \iff w_{j^2} v_{i^2} \in L_3$$

- $w_{i^2} v_{i^2} = w_{i^2+1} \in L_3$
- $w_{j^2} v_{i^2} \notin L_3$, da $w_{j^2} v_{i^2}$ viel länger ist als w_{j^2} und kürzer als w_{j^2+1}

$$|w_{j^2}| \underset{\substack{\uparrow \\ |v_{i^2}|>0}}{<} |w_{j^2} v_{i^2}| \overset{(I)}{<} |w_{j^2} v_{j^2}| = |w_{j^2+1}|$$

(I) $|v_{n^2}| = |w_{n^2+1}| - |w_{n^2}| = (n^2+1)\lceil\sqrt{n^2+1}\rceil - n^2\lceil\sqrt{n^2}\rceil = n^2 + n + 1$

Ergo: $|v_{j^2}| - |v_{i^2}| = j^2 + j + 1 - (i^2 + i + 1) = j^2 - i^2 + j - i > 0$ $\lightning$

$\square$

Serienbingo:

A16 Haben Biologen gute Job-Chancen?

A17 Wichtig

A18 Mit freundlichen Grüßen: Nein