Übungsstunde 4

Freitag, 13. Oktober 2023 09:01

Bisher: EA konstruieren welcher eine Sprache erkennt

Jetzt: Existenz eines EA wiederlegen via Nichtregularitätsbeweise

Nichtregularitätsbeweise:

Mächtigkeit: Lemma 3.3 > Pumping-Lemma > Kolmogorov

Zunächst zeigen wir die Nichtregularität von $L = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ anhand aller Methoden

Via Lemma 3.3: Widerspruchsannahme: Angenommen L ist regulär. $\Sigma := \{0,1\}$

Dann existiert ein EA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit $L(A) = L$. Betrachte die $|Q|+1$ Wörter $\boxed{0^i}$ für $k \in \{1, \dots, |Q|+1\}$ Wie beim PL steht und fällt der Beweis durch die Wahl der Wörter. Diese sind $|(0, 0^2, \dots, 0^{|Q|+1})|$. Da die Menge der Wörter größer ist als die Anzahl Zustände $|Q|$ existieren nach dem Schubfachprinzip $i, j \in \{1, \dots, |Q|+1\}$ mit $i < j$ s.d. $\hat{\delta}(q_0, \boxed{0^i}) = \hat{\delta}(q_0, \boxed{0^j})$. Nach Lemma 3.3 muss nun $\forall z \in \{0,1\}^*$: $\boxed{0^i z} \in L \iff \boxed{0^j z} \in L$ gelten.

Wähle $z = \boxed{1^i}$. Dann gilt $\boxed{0^i 1^i} \in L$ aber $\boxed{0^j 1^i} \notin L$ ↯ Widerspruch □

Lets Pump: Widerspruchsannahme: Angenommen L ist regulär

Nach dem PL $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall w \in \{0,1\}^*$ mit $|w| \geq n_0$ $\exists x, y, z \in \{0,1\}^*$ s.d. $w = yxz$ und

i) $|yx| \leq n_0$

ii) $|x| \geq 1$

iii) $M := \{yx^k z \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq L$ oder $M \cap L = \emptyset$.

Wir wählen das Wort $w = \boxed{0^{n_0} 1^{n_0}}$. Da $|w| = 2n_0 \geq n_0$ $\exists x, y, z \in \{0,1\}^*$ s.d.

wegen i) $y = \boxed{0^L}$, $x = \boxed{0^m}$ mit $L, m \in \mathbb{N}$ und $L + m \leq n_0$, also insbesondere wegen ii) $m \geq 1$. Also $z = \boxed{0^{n_0 - (L+m)} 1^{n_0}}$.

Insbesondere ist dies die einzig mögliche Zerlegung von w, welche die Voraussetzungen des PL erfüllt!

Fall 1: $k = 1$. $yxz = \boxed{0^L 0^m 0^{n_0 - (m-L)} 1^{n_0}} = \boxed{0^{n_0} 1^{n_0}} \notin L$

Fall 2: $k = 0$. $yx^0 z = yz = \boxed{0^L 0^{n_0 - (L+m)} 1^{n_0}} = \boxed{0^{n_0 - m} 1^{n_0}} \in L$, da $1 \leq m \leq n_0$ ↯

Dies ist ein Widerspruch zu iii), also ist L nicht regulär. □

Via Kolmogorov-Komplexität: Widerspruchsannahme: Angenommen L ist regulär.

! Kolmogorov kann nur über dem Alphabet $\subseteq \Sigma_{bool}$ verwendet werden, also z.B. nicht über $\{0,1,\#\}$! Wähle $x = \boxed{0^i}$. Betrachte die Sprache $L_x = \{y \in \{0,1\}^* \mid xy \in L\}$

$\forall i \in \mathbb{N}$ ist das $\boxed{1.}$ Wort in L_x $\boxed{1^i}$. Nach Satz 3.1 $\exists c \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall i \in \mathbb{N}$:

$K(\boxed{1^i}) \leq \lceil \log_2(\boxed{1} + 1) \rceil + c = c + 1 =: d$

Da es nur endlich viele Programme mit binärer Länge $\leq d$ $\left(\sum_{i=1}^{d} 2^i = 2^{d+1} - 2\right)$ gibt, aber ∞-viele Wörter der Form 0^m, ist dies ein Widerspruch. Also ist L nicht regulär. $\square$

Alles in blau sind Stellen, die je nach vorgegebener Sprache angepasst werden müssen. **Bei der KK ist es oft sinnvoll, das jeweils zweite Wort der Sprache L_x zu betrachten. Allgemein ist die KK für gewöhnlich die kompakteste Lösung.**

Aufgabe: Zeige mittels dem Pumping-Lemma, dass $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w|_0 \neq |w|_1\}$ nicht regulär ist.

Beweis: Per Widerspruch. Angenommen L sei regulär. Nach dem PL $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.d.

$\forall w \in \{0,1\}^*$ mit $|w| \geq n_0$ $\exists x, y, z \in \{0,1\}^*$ s.d. $w = yxz$ und

i) $|yx| \leq n_0$

ii) $|x| \geq 1$

iii) $M := \{yx^kz \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq L$ oder $M \cap L = \emptyset$.

Wir wählen das Wort $w = 0^{n_0}1^{n_0}$. Da $|w| = 2n_0 \geq n_0$ $\exists x, y, z \in \{0,1\}^*$ s.d.

wegen i) $y = 0^l$, $x = 0^m$ mit $l, m \in \mathbb{N}$ und $l + m \leq n_0$, also insbesondere wegen ii) $m \geq 1$. Also $z = 0^{n_0-(l+m)}1^{n_0}$.

Insbesondere ist dies die einzig mögliche Zerlegung von w, welche die Voraussetzungen des PL erfüllt! Wir zeigen nun, dass iii) nicht erfüllt ist.

Fall 1: $k = 1$. $yxz = 0^l 0^m 0^{n_0-(m-l)} 1^{n_0} = 0^{n_0} 1^{n_0} \notin L$

Fall 2: $k = 0$. $yx^0z = yz = 0^l 0^{n_0-(l+m)} 1^{n_0} = 0^{n_0-m} 1^{n_0} \in L$, da $1 \leq m \leq n_0$ ↯

Dies ist ein Widerspruch zu iii), also ist L nicht regulär. $\square$

Aufgabe: Zeige, dass $L_2 = \{ 0^{\binom{2n}{n}} \mid n \in \mathbb{N} \}$ nicht regulär ist.

Beweis: Wir verwenden die Methode der KK.

Beweis per Widerspruch. Angenommen L_2 sei regulär. Wähle $x = 0^{\binom{2n}{n}}$. Betrachte die Suffixsprache $L_x = \{ y \in \{0\}^* \mid xy \in L_2 \}$. Setze $m := \binom{2(n+1)}{n+1} - \binom{2n}{n}$. Dann ist das zweite Wort in L_x 0^m. Nach Satz 3.1 existiert eine von m & n unabhängige Konstante c, s.d. $K(0^m) \leq c + \lceil \log_2(2+1) \rceil \leq c + 2 =: d$

Da es nur endlich viele Programme mit binärer Länge $\leq d$ ($\sum_{i=1}^{d} 2^i = 2^{d+1} - 2$) gibt, aber ∞-viele Wörter der Form 0^m, ist dies ein Widerspruch. Also ist L_2 nicht regulär $\square$

Aufgabe: Zeige, dass $L = \{ ww \mid w \in \{0,1\}^* \}$ nicht regulär ist.

Beweis: Wir beweisen per Widerspruch. Angenommen L sei regulär. Sei $L_{0^m 1} = \{ y \in \{0,1\}^* \mid 0^m 1 y \in L \}$ für ein $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. $y = 0^m 1$ ist das erste Wort in $L_{0^m 1}$ für jedes m. Nach Satz 3.1 existiert eine von m unabhängige Konstante c, s.d. $K(0^m 1) \leq \lceil \log_2(1+1) \rceil + c =: d$. Dies kann nicht sein, da eine endliche Menge von Programmen der Länge höchstens d keine unendliche Menge von verschiedenen Wörtern der Form $0^m 1$ cenerieren kann $\lightning$ Fol lich ist L nicht re ulär. $\square$

Aufgabe: $\tilde{L} = \{ w \in \{0,1\}^* \mid |u|_0 \neq |u|_1$ für alle Präfixe u von $w \}$ ist nicht regulär.

Das PL bietet sich häufig an, wenn wir Zählbedingungen in der Sprache haben. Widerspruchsbeweis. Angenommen $\tilde{L}$ ist regulär. Sei n_0 die Konstante aus dem PL. Wir wählen das Wort $w = 1^{n_0} 0^{n_0}$. Offenbar gilt $|w| \geq n_0$. Also muss es eine Zerlegung $w = yxz$ von w geben der die Bedingungen im PL erfüllt. Wegen

i) gilt: $|yx| \leq n_0 \implies y = 1^l$ und $x = 1^m$ für $l, m \in \mathbb{N}$ mit $l + m \leq n_0$, insbesondere $m \leq n_0$.

Wegen ii) gilt weiter $m > 0$. Da $w \notin \tilde{L}$, gilt nach iii), dass auch $\{ yx^k z \mid k \in \mathbb{N} \} = \{ 1^{n_0 + (k-1)m} 0^{n_0} \mid k \in \mathbb{N} \} \cap \tilde{L} = \emptyset$ $\lightning$ da $yx^2z = 1^{n_0+m} 0^{n_0} \in \tilde{L}$ da $n_0 + m > n_0$ $\square$

Jecke lieder:

Stadt met K - Kasalla

Mer losse d'r Dom in Kölle - Bläck Fööss

Denn wenn et Trömmelche jeht - Räuber

Et jitt kei Wood - Cat Ballou

Jecket video:

Monster among men - Das Freak

Kir Royal - fette Ansage (Mario Adorf)

Warum Deutsche Lichtenstein lieben sollte | ZDF Magazin Royale 2^{30} - 2^{55} min

Serien Bingo:

A10 gut mal gesehen zu haben, aber unwahrscheinlich für das Midterm

A11 extrem klausurrelevant

A12 extrem klausurrelevant