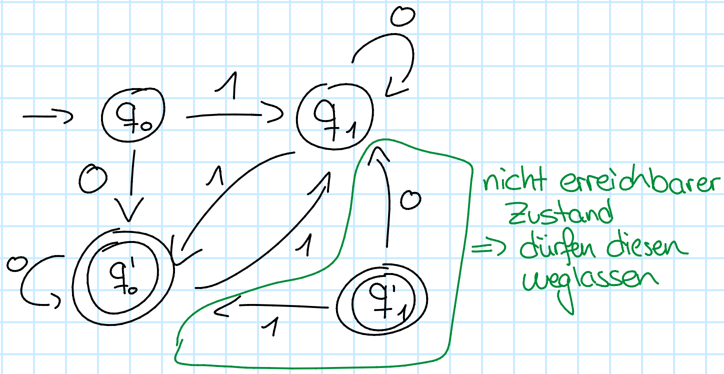
Übungsstunde 3

Freitag, 6. Oktober 2023 16:03

Nachdem wir die Konzepte für Alphabete, Wörter und Sprachen kennengelernt haben, konstruieren wir nun zum ersten Mal einen Automaten welcher die gesamte Sprache erkennt. Wer einen EA im Einsatz sehen möchte kann dies im F-Stock vom HG 24/7 tun. Leider gibt es beim entwerfen von EA keinen Königsweg. Hier lautet die Devise: Übung macht den Meister. Ein einleitendes Beispiel:

Aufgabe: Entwerfe einen EA welcher die Sprache $L = \{wa \in \{0,1\}^* \mid a = |w|_1 \bmod 2 \wedge a \in \{0,1\}\}$ erkennt und begründe inoffiziell die Korrektheit.

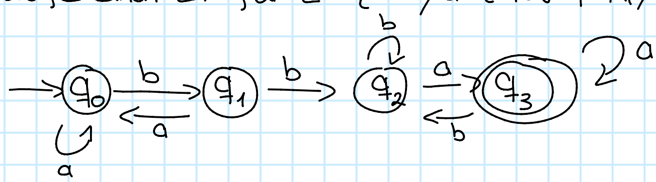
Lösung:



Begründung:
- q_0, q_0' werden auf einem Wort x mit $0 = |x|_1 \bmod 2$ erreicht
- q_1, q_1' " $1 = |x|_1 \bmod 2$ "
- q_0 wird nur durch λ erreicht $(\lambda \notin L)$
- q_1 wird nur durch wa s.d. $a \neq |w|_1 \bmod 2$ erreicht

Aufgabe: Entwerfe einen EA für $L = \{xbbya \in \{a,b\}^* \mid x, y \in \{a,b\}^*\}$ und gib die Klassen an

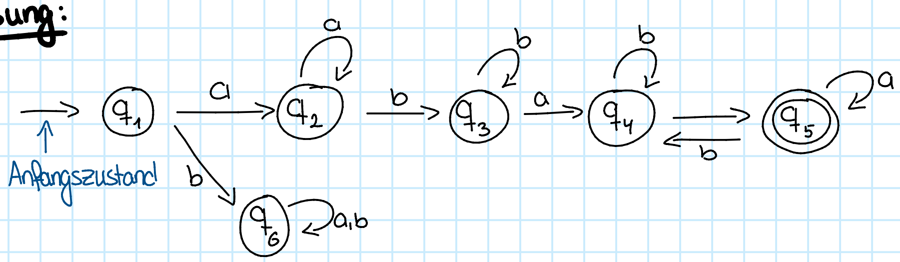
Lösung:



$$Kl[q_0] = \{\lambda\} \cup \{wa \in \{a,b\}^* \mid w \text{ enthält nicht } bb\}$$
$$Kl[q_1] = Kl[q_0] \cdot \{b\}$$
$$Kl[q_2] = \{a,b\}^* - (Kl[q_0] \cup Kl[q_1] \cup L)$$
$$Kl[q_3] = L$$

Aufgabe: Entwerfe einen endlichen Automaten für die Sprache $L_0 = \{axa \mid x \in \{a,b\}^* \text{ und } ba \text{ ist Teilwort von } x\}$ und gebe für jeden Zustand q die Klasse $Kl[q]$ an

Lösung:



⚠ Egal welchen Buchstaben wir in einem Zustand lesen. Der nächste Zustand muss definiert sein!

Klassen: $Kl[q_6] = \{by \mid y \in \{a,b\}^*\}$

$Kl[q_5] = L_0$

$Kl[q_1] = \{\lambda\}$

$Kl[q_2] = \{a\}^+$

$Kl[q_3] = \{a^i b^j \mid i,j \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$

$Kl[q_4] = \{a,b\}^* - \left(\bigcup_{i=1}^{3} Kl[q_i] \cup Kl[q_5] \cup Kl[q_6]\right)$ $\square$

Soweit so gut, aber was machen wir nun, wenn die gegebene Sprache nicht "schön" ist?

Ganz einfach: Wir versuchen die Bedingung umzuformulieren! **(Fallunterscheidungen!)**

Beispiel: $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid (2 \cdot |w|_1)^{|w|_0} \equiv 0 \mod 2\}$

Setze $L := |w|_0$, $k := 2|w|_1$ Wir betrachten nun zwei Fälle und vereinfachen so die Beschreibung der Sprache: Wir nehmen an: $0^0 := 1$

1. $L = 0 \Rightarrow k^L = k^0 = 1 \not\equiv 0 \mod 1$ $(\notin L)$
2. $L \geq 1$. Claim: $k^L \equiv 0 \mod 2$ $(\in L)$

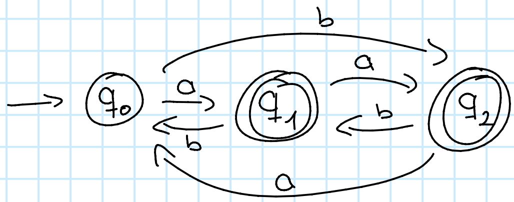
   Proof: Note: k is even $\Rightarrow k^L = (2|w|_1)^L = 2^L \cdot |w|_1^L \equiv 0 \mod 2$ $\square$

Also können wir L wie folgt umschreiben:

$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_0 \geq 1\}$

Aufgabe: Entwerfe einen EA für $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid (|w|_a + 2|w|_b + 1) \mod 3 \neq 1\}$ und gib die Klassen an

Lösung: Schreibe L um: $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid (|w|_a - |w|_b) \mod 3 \neq 0\}$



$KL[q_i] = \{w \in \{a,b\}^* \mid (|w|_a - |w|_b) \mod 3 = i\}$ für $i \in \{0,1,2\}$

Aufgabe: Konstruktion eines Produktautomaten

$L = \{ w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a \bmod 3 = |w| \bmod 3$ oder (w enthält das Teilwort ab und w endet mit b$)\}$

Lösung: Wir ~~schreiben~~ betrachten zunächst die einzelnen Teilsprachen seperat und führen später zusammen.

$L_1 = \{ w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a \bmod 3 = |w| \bmod 3 \}$

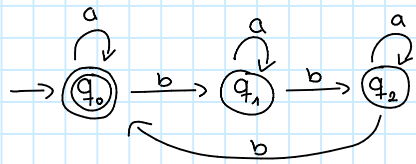
$= \{ \quad " \quad \mid \cancel{|w|_a} \bmod 3 = (\cancel{|w|_a} + |w|_b) \bmod 3 \}$

$= \{ \quad " \quad \mid |w|_b \bmod 3 = 0 \}$

$L_2 = \{ \quad " \quad \mid w$ enthält das Teilwort ab und w endet mit $b \}$

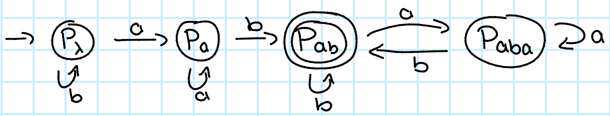
$\Rightarrow L = L_1 \cup L_2$

Automat für L_1:



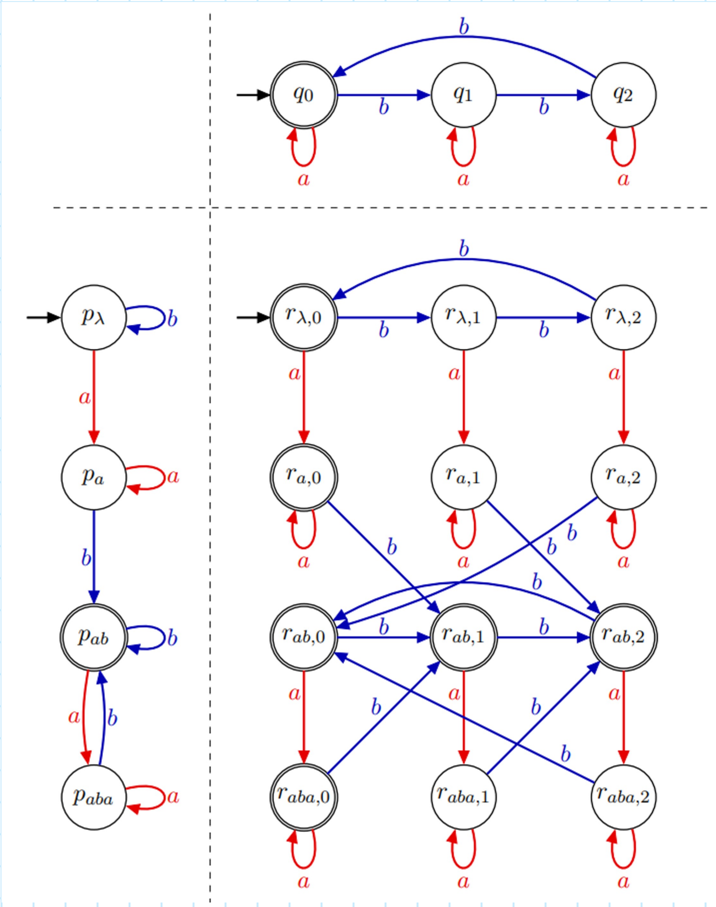
$Kl[q_i] = \{ w \in \{a,b\}^* \mid |w|_b \bmod 3 = i \}$

Automat für L_2:



$Kl[p_\lambda] = \{b\}^*$
$Kl[p_a] = \{ xay \mid x \in \{b\}^*, y \in \{a\}^* \}$
$Kl[p_{ab}] = L_2$
$Kl[p_{aba}] = \{a,b\}^* - \bigcup_{z \in \{\lambda, a, ab\}} Kl[p_z]$

Den Produktautomaten erhält man nun durchs Kreuzprodukt: $r_{x,y} = \langle p_x, q_y \rangle$



q_0
q_1
q_2
p_λ
p_a
p_{ab}
p_{aba}
$r_{\lambda,0}$
$r_{\lambda,1}$
$r_{\lambda,2}$
$r_{a,0}$
$r_{a,1}$
$r_{a,2}$
$r_{ab,0}$
$r_{ab,1}$
$r_{ab,2}$
$r_{aba,0}$
$r_{aba,1}$
$r_{aba,2}$
a
b