Yallah

Donnerstag, 24. November 2022 14:29

$\mathcal{L}_{RE} = \{ L(M) \mid M \text{ ist TM} \}$

$\mathcal{L}_{R} = \{ L(M) \mid M \text{ ist TM, die immer hält} \}$

- $L_1 \leq_R L_2$: "L_1 auf L_2 rekursiv reduzierbar", falls $L_2 \in \mathcal{L}_R \implies L_1 \in \mathcal{L}_R$

  "Wenn ich L_2 lösen kann, dann kann ich auch L_1 lösen"

  ⇝ Wir benutzen die TM M' welche L_2 berechnet (i.e. $L(M') = L_2$) und benutzen M' in der Konstruktion einer TM M welche L_1 berechnet (i.e. $L(M) = L_1$)

- $L_1 \leq_{EE} L_2$: Eingabe - zu - Eingabe Reduktion: Gib eine TM M an, welche ein Wort in L_1 zu einem äquivalenten Wort in L_2 umformt. $\forall x \in \Sigma_1^*: \; x \in L_1 \iff f_M(x) \in L_2$, wobei $f_M : \Sigma_1^* \longrightarrow \Sigma_2^*$ die von M berechnete Abbildung ist

  ⇝ Wir benutzen eine Eingabe für L_1 und transformieren diese in eine Eingabe für L_2, s.d. die Eingabe für L_1 akzeptiert wird $\iff$ unsere transformatierte Eingabe für L_2 akzeptiert wird

  ⇝ $\leq_{EE} \implies \leq_R$

Beispiel: $L_H = \{ \mathrm{Kod}(M)\#w \mid M \text{ hält auf } w \} \leq_{EE} L_{diag}^c = \{ w \in \{0,1\}^* \mid w = w_i \land M_i \text{ akz. } w_i \}$

Sei $w = \mathrm{Kod}(M)\#x$ eine Eingabe für L_H.

Wir geben einen Algo. F an, der eine Eingabe w für L_H in eine Eingabe $f(x)$ für L_{diag}^c transformiert. F arbeitet wie folgt:

Prüfe ob $w = \mathrm{Kod}(M)\#x$ für $\mathrm{Kod}(M)\#x \in \mathrm{KodTM} \cdot \# \cdot \{0,1\}^*$.

Falls nicht so generiert F eine TM B, welche jede Eingabe verwirft.

Dann berechnet F das $i \in \mathbb{N}$ s.d. $B = M_i$, die i-te TM ist.

Die Ausgabe von F ist dann $f(w) = w_i$, w_i = das i-te kanon. Wort

Falls w obige Form hat, so berechnet F eine TM A, die wie folgt arbeitet.

Unabhängig von seiner Eingabe simuliert A die Eingabe x auf M.

M hält auf $x \implies A$ akzeptiert seine Eingabe

M hält nicht auf $x \implies A$ hält nicht

Nun berechnet F das $i \in \mathbb{N}$ s.d. $A = M_i$.

Die Ausgabe von F ist nun $f(w) = w_i$

<u>Beh.</u>: $w \in L_H \iff f(w) \in L_{diag}^c$

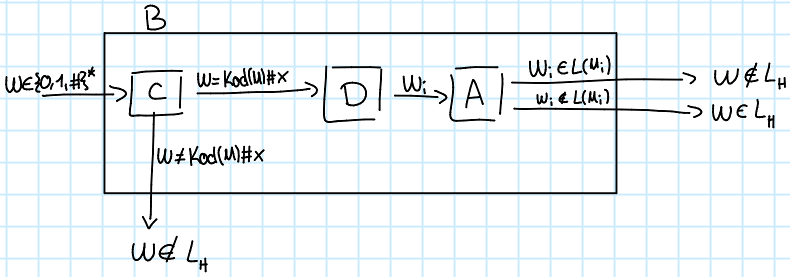
Proof: $w \in L_H \iff w = Kod(M)\#x \wedge M$ hält auf x

$\iff M_i = A$ hält auf jeder Eingabe

$\iff w_i \in L(M_i) \iff w_i = f(w_i) \in L_{diag}^c$ □

Beispiel: $L_H \le_R L_{diag}$

Angenommen ∃ Algorithmus A, der L_{diag} entscheidet. Wir konstruieren hieraus einen Algo. B der mit Hilfe von A die Sprache L_H entscheidet.



D arbeitet wie folgt: D bestimmt das i-te Wort w_i für eine TM M_i, wobei M_i unabhängig von seiner Eingabe x auf M simuliert.

Hält M auf x, so akzeptiert M_i seine Eingabe

Hält M auf x nicht, so hält auch M_i nicht.

Es ist klar, dass B in endlicher Zeit terminiert und per Konstruktion gilt $L(B) = L_H$