Woche 9

Dienstag, 2. Mai 2023 11:58

Plan: Theorie bis 17^{15}
Kernaufgaben ab 17^{15}

Übersicht der Verfahren

Typ	1D	D
Fixpunkt	Finde H	$\phi: D \to D$
Bisektion	✓	✗
Newton		
• "normal"	✓	✓
• Sekanten (DF unknown)	✓	Broyden
• gedämpft	✓	✓

Recap Newton:

a) Ableitung DF muss bekannt sein. Sonst:
1D: Sekantenverfahren $F'(x) \approx \dfrac{F(x_k) - F(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$
nD: Broyden-Verfahren

b) man braucht einen guten Startwert
↳ Konvergenzgebiet vergrössern: gedämpftes Newtonverfahren

c) man berechnet nie Inverse einer Matrix in Numerik, sondern löst immer das zugehörige LGS mit solve: $\underset{A}{A}\underset{x}{A^{-1}} = \underset{b}{\mathbb{1}} \Rightarrow A^{-1} = \text{solve}(A, \mathbb{1})$

Gedämpftes Newtonverfahren:

Idee: Führe zusätzlichen Faktor λ^k in den Newton-Schritt ein, um das Konvergenzgebiet zu vergrößern

D.h.: Newton Schritt: $x_{k+1} = x_k - \lambda^k \overbrace{DF^{-1}(x_k) F(x_k)}^{= \Delta x_k = s}$

Wie wählen wir λ^k? Ausprobieren!

Wir bestimmen λ^k in jedem Schritt, s.d. $0 < \lambda^k \leq 1$ und

(*) $\|\Delta x(\lambda^k)\|_2 \leq \left(1 - \frac{\lambda^k}{2}\right) \|\underbrace{\Delta x_k}_{=s}\|_2$ wobei $\Delta x(\lambda^k) = \underbrace{DF(x_k)^{-1} F(\overbrace{x_k - \lambda \Delta x_k}^{x_{k+1}})}_{\approx \|x_{k+2} - x_{k+1}\|_2 \text{ im "normalen" Verfahren}}$

In der normalen, nicht-gedämpften Methode gilt zudem: $\|\Delta x_k\|_2 = \|x_{k+1} - x_k\|_2$

D.h. die Bedingung ⊛ bedeutet eigentlich, dass wir λ^k so bestimmen wollen, dass $\|x_{k+2} - x_{k+1}\| \underset{\text{Konvergenz}}{\leq} \|x_{k+1} - x_k\|$ für das "normale" Newtonverfahren gelten würde

→ erzwinge mit λ^k (asymptotisch mit $p \to 2$)

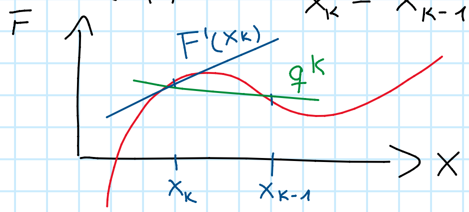
Im Programm: Mache vor Newton-Schritt eine Schlaufe und überprüfe ob für λ_0^k die Bedingung ⊛ gilt. Wenn nicht, dann $\lambda_1^k = \frac{\lambda_0^k}{2}$ und prüfe erneut, usw. Breche ab, falls λ_m^k zu klein

Problem: Was tun, wenn die Ableitung DF, F' nicht bekannt oder zu teuer ist?

Sekantenverfahren: (1D)

Idee: Ersetze $F'(x_k)$ durch Sekante q^k

$$F'(x_k) \approx \frac{F(x_k) - F(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} =: q^k$$



Für $\|x_k - x_{k-1}\|$ klein: $q^k \approx F'(x_k)$

Implementation: Ersetze $F'(x_k)$ mit q^k

Newton-Schritt: $x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{q^k}$, benötigt Startwert $q^0 = F'(x_0)$

Konvergenz: $p \approx 1.62$

nD: Broyden-Verfahren

Idee: verallgemeinere Sekantenverfahren auf n-Dimensionen

Wir können nicht durch Vektoren teilen!

1D

$$q^k = \frac{F(x_k) - F(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \longrightarrow$$

nD ⊛

$$\underbrace{J_k}_{\text{nicht eindeutig}}\underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{\in \mathbb{R}^n} = F(x_k) - F(x_{k-1})$$

Falls J_k ⊛ erfüllt, gilt: $J_k \approx DF(x_k)$. Neues Verfahren:

$$x_{k+1} = x_k - J_k^{-1} F(x_k) \quad (I)$$

Wie bestimmt man J_k? J_0 muss als Startwert gegeben werden. Oft $J_0 = DF(x_0)$

Ein mögliches J_k liefert die Broyden-Bedingung:

$$\forall u \in \langle x_k - x_{k-1} \rangle^{\perp}: \quad J_k u \overset{?}{=} J_{k-1} u \qquad (\Delta)$$

Falls nun (*) und (Δ) gelten, so folgt:

$$J_k = J_{k-1} + \frac{F(x_k)(x_k - x_{k-1})^T}{\|x_k - x_{k-1}\|_2^2}$$

Überprüfe:

a) $u \in \langle x_k - x_{k-1} \rangle^{\perp}$. Dann: $J_k u = J_{k-1} u + \frac{F(x_k)\overbrace{(x_k - x_{k-1})^T u}^{=0}}{\|x_k - x_{k-1}\|_2^2} = J_{k-1} u$

b) Für $v = x_k - x_{k-1}$ gilt:

$$J_k v = \underbrace{J_{k-1} v}_{\overset{(I)}{=} -F(x_{k-1})} + \frac{F(x_k)\overbrace{(x_k - x_{k-1})^T v}^{\|x_k - x_{k-1}\|_2^2}}{\|x_k - x_{k-1}\|_2^2} = F(x_k) - F(x_{k-1})$$

$\rightsquigarrow$ Formel erfüllt Sekanten und Broyden-Bedingung

Implementation:

i) $s_k = \text{solve}(J_k, -F(x_k))$

ii) $x_{k+1} = x_k + s_k$

iii) $J_{k+1} = J_k + \frac{F(x_{k+1}) s_k^T}{\|s_k\|_2^2}$

Sherman-Morisson-Woodbury Update-Formel:

$$J_{k+1}^{-1} = \left(\mathbb{1} - \frac{J_k^{-1} F(x_{k+1}) s_k^T}{\|s_k\|_2^2 + s_k^T J_k^{-1} F(x_{k+1})} \right) J_k^{-1}$$

i) $s_k = -J_k F(x_k)$

ii) $x_{k+1} = x_k + s_k$

iii) $J_{k+1}^{-1} =$