Woche 3

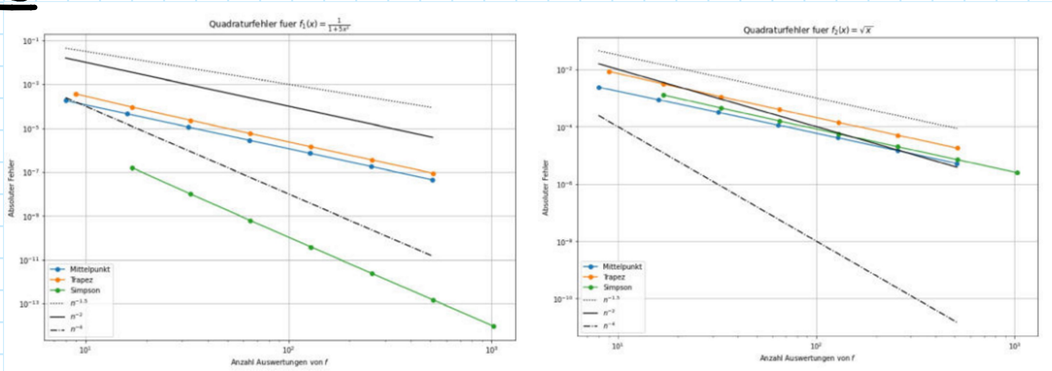
Freitag, 10. März 2023 12:46

Nachbesprechung Serie 2:

→ gut gelöst, aber bitte entfernt nichts aus den Templates
  ↳ Vor dem Abgeben: Vorname, Nachname ergänzen, hand-in auf True setzen

→ Interpretation von Plots: übt unbedingt, Plots / Resultate zu interpretieren
  ↳ Wird definitiv an der Prüfung verlangt

Plots:



⇝ **Was sieht man?** f_1 hinreichend glatt
f_2 nicht

⇒ Wenn Funktion hinreichend glatt, so ist asymptotisches Verhalten der Quadratur-Regeln wie erwartet.
Ist sie jedoch nicht "glatt" so kann es sein, dass der Fehler der TR & SR fast gleich sind ⇒ ziehen TR vor, da sie billiger ist

Wieso ist $f_2(x) = \sqrt{x}$ auf $I = [0,1]$ nicht "glatt" genug?

Fehler der zusammengesetzten Quadratur auf $I = [a,b]$:

$$E = \left| \int_a^b f(x)dx - Q(f;a,b) \right| \leq C \cdot h^p \, \|f^{(p)}\|_{L^\infty(I)}$$

Falls nun $f \notin C^p(I)$, so haben wir ein Problem:

$$f_2'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \text{divergiert für } x = 0$$

⇒ nicht ableitbar bei $x = 0$

⇒ $f \notin C^2([0,1])$

⇒ Konvergenzordnung bricht zusammen

Gauss-Legendre Quadratur (nicht-äquidist. Stützstellen)

Idee: s Knoten & Gewichte so wählen, dass $E(s)=0 \quad \forall P\in \mathbb{P}[x]^{\leq 2s-1}$

Folglich hat die GL-QR Ordnung $2s$. Man spricht von höchster Ordnung, da wegen der $2s$ Freiheitsgrade keine höhere Ordnung erreicht werden kann.

Def.: **Skalarprodukt**

Sei V ein V.R. Ein SKP $\langle\cdot,\cdot\rangle \to \mathbb{R}$ ist

bilinear: $\forall u,v,w\in V, \forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ gilt $\langle \alpha u+\beta v, w\rangle = \alpha\langle u,w\rangle + \beta\langle v,w\rangle$

$\langle u, \alpha v+\beta w\rangle = \alpha\langle u,v\rangle + \beta\langle u,w\rangle$

symmetrisch: $\forall u,v\in V$: $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$

positiv definit: $\forall v\in V$: $\langle v,v\rangle \geq 0$ und $\langle v,v\rangle = 0 \iff v=0$

Bsp.: $V=\mathbb{R}^3$, $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$

$V=\mathbb{R}[x]^{\leq n}$, $\langle P,Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx$ (wieso dieses SKP?)

Def.: **Orthogonalität**

Sei $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklid. V.R. $u,v\in V$ sind orthogonal, falls $\langle u,v\rangle = 0$

Thm.: **Polynomdivision**

Seien $P,M\in\mathbb{R}[x]$ mit $\deg(P)=s+m$, $\deg(M)=s^{\geq 1}$. Dann $\exists R,G\in\mathbb{R}[x]$ mit $\deg(R)\leq s-1$ und $\deg(G)=m$, s.d.

$$P(x)=M(x)G(x)+R(x)$$

Nehmen wir nun an, wir haben eine QF mit s Stützen, Ordnung $s+m+1$, d.h. $P(x)$ wird exakt berechnet, i.e.: $\int_a^b P(x)dx = \sum_{i=1}^{s} P(x_i)w_i$

Wähle $M(x) = \prod_{i=1}^{s}(x-x_i)$ und mit Polynomdivision folgt:

$$\begin{array}{ccccc} \int_a^b P(x)dx & = & \int_a^b M(x)G(x)dx & + & \int_a^b R(x)dx \\ \parallel & & \parallel & & \parallel\text{exakt} \\ \sum_{i=1}^{s} P(x_i)w_i & = & \underbrace{\sum_{i=1}^{s} \overset{=0}{M(x_i)}G(x_i)w_i}_{=0} & + & \sum_{i=1}^{s} R(x_i)w_i \end{array}$$

$$\Rightarrow \langle M,G\rangle := \int_a^b M(x)G(x)dx \overset{!}{=} 0 \quad \forall G\in\mathbb{R}[x]^{\leq m}$$

Wir haben also gezeigt: QF mit Stützen $\{x_i\}$ und Ordnung

$\iff \langle M,G\rangle = 0 \quad \forall G\in\mathbb{R}[x]^{\leq m}$ wenn $M(x)=\prod_{i=1}^{s}(x-x_i)$

"$\Leftarrow$" kann man auch zeigen

Folge: Maximale Ordnung $= 2s$. Falls nicht, wähle $G = M \Rightarrow \int_a^b M(x)M(x)dx = 0$

$\Leftrightarrow M(x)^2 = 0 \Rightarrow 0 = \deg(M^2) = 2 \cdot \deg(M) = 2 \cdot s \Rightarrow s = 0$ ↯

Gefunden: QF hat Ordnung $2s \Leftrightarrow$ Polynom aus Stützstellen ist orthogonal zu allen Polynomen kleineren Grades

Wollen: orthogonale Polynome bzgl. $\langle P, Q \rangle = \int_a^b P(x)Q(x)dx$

Für $[a,b] = [-1,1] \Rightarrow$ Legendre-Polynome

Wie orthogonilisieren?

Thm.: Gram - Schmidt

Sei $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ Basis des VR $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Dann können wir eine orthogonale Basis finden: $v_i := b_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle v_k, b_i \rangle}{\langle v_k, v_k \rangle}$

Legendre-Polynome:

Monombasis $B = \{1, x, \dots, x^n\}$, $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx$

$$P_i(x) = x^i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle P_k - x^i \rangle}{\langle P_k, P_k \rangle}, \quad i \in [n]$$

wobei $P_k(1) = 1$

Dann: $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

$$\langle P_k, P_j \rangle = \frac{2}{2k+1} \delta_{kj}$$

Frage: Was können wir jetzt noch tun?

→ Numerisch stabile Methode zur Berechnung

→ Gewichte berechnen via Golub-Welsch: $w_k = 2(v^k)_1^2$, v^k: k-ter EW Matrix

Wie kommen wir dahin?

(1) GS $\Rightarrow$ 3-Term-Rekurrenz

(2) $\Rightarrow$ Matrix Notation

(3) $\Rightarrow$ EW-Bedingung