Woche 10

Freitag, 12. Mai 2023 11:31

Linear - Implizite RK Verfahren

Idee: Nullstellen-know-how auf RK-Verfahren anwenden?

Wieso? Wir wollen Fsolve "überflüssig" machen

Autonomes AWP:

$$\begin{cases} \dot{y} = f(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

diagonal-implizites RK-Verfahren

$$\begin{array}{c|c} & A \\ \hline & b^T \end{array} = \begin{array}{c|ccc} & a_{11} & & 0 \\ & & \ddots & \\ & * & & a_{ss} \\ \hline & b_1 & \cdots & b_s \end{array}$$

wobei $a_{ii} \neq 0$

Wir wissen, dass wir folgende Gleichungen lösen müssen:

$$k_i = f(y_0 + h \sum_{j=1}^{i} a_{ij} k_j)$$

$$\Longleftrightarrow \quad F_i(k) := k - f(y_0 + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j + h a_{ii} k)$$

und $k_i = k^*$ s.d. $F(k^*) = 0$

Idee: Anstatt das "teure" fsolve zu benutzen, machen wir NUR 1 Newton-Schritt

Problem: Verschlechtert Konvergenz

⇝ Lösung: Wähle Startwert k_i^0 für den Newtonschritt gut :)

i.e. $k_i := k_i^{(1)} = k_i^0 - DF(k_i^0)^{-1} F(k_i^0)$ (*)

1-NS

Wir benötigen also $DF(k)$ (totale Ableitung)

$$DF(k) = \mathbb{1} - Df(y_0 + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j + h a_{ii} k)\, \underbrace{h a_{ii}}_{\text{Kettenregel}}$$

Für den Startwert k_i^0 machen wir den Ansatz:

$$k_i^0 = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{d_{ij}}{a_{ii}} k_j , \qquad d_{ij} \in \mathbb{R}$$

d_{ij} bestimmen dabei das spezifische Verfahren ⇒ sind bekannt für gegebene Methode

Überlegung: d_{ij} versuchen gut zu wählen (für Konvergenz)

Aus ⊛ erhalten wir durch Multiplikation mit $DF(k_i^0)$:

$$\underbrace{DF(k_i^0)}_{A}\, k_i = \underbrace{DF(k_i^0)k_i^0 - F(k_i^0)}_{b} \qquad (S.204) \qquad \text{LGS}$$

in Python: k_i = solve(A, b)

Nützlich, da sie

a) relativ schnell

b) auf steife DGLs anwendbar

Matrix Zerlegungen

Ziel: Linalg-Wissen in Numerik übertragen und unterschiedliche Verfahren vergleichen

Problem: bei num. Rechnungen gibt es immer Rundungsfehler

$\Rightarrow$ möglichst stabile Verfahren, d.h. Verfahren bei denen das Resultat durch die Fehler nicht übermässig beeinflusst wird

Was ist unser Mass für die "Stabilität":

Def: (rel. Kondition)

Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein math. Problem (z.B. lösen eines LGS mittels LU-Zerlegung). Sei x der analytische Input und $\tilde{x}$ der fehlerbehaftete. Dann ist die rel. Kondition (K_{rel}) definiert, s.d. $\exists \delta > 0$

$$\frac{\|f(\tilde{x}) - f(x)\|}{\|f(x)\|} \leq K_{rel} \frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \quad \forall \tilde{x} \in \mathbb{R}^n \text{ s.d. } \|\tilde{x} - x\| < \delta$$

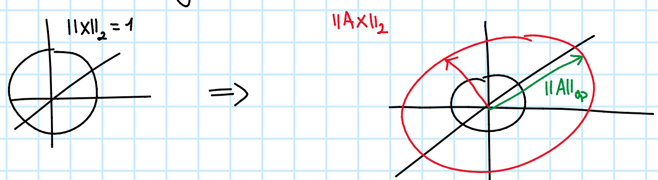
Intuition: „Wie wird der Rundungsfehler im schlimmsten Fall vergrössert"

Im Fall für Matrizenzerlegungen / LGS:

$$A \in GL_n(\mathbb{R}): \quad \underset{\text{cond}(A)}{K(A)} = \|A\|_{op} \|A^{-1}\|_{op}, \text{ wobei}$$

$$\|A\|_{op} := \sup_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2 = \sup_{\|x\|_2 \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

$\equiv$ maximale Verzerrung der Einheitssphäre durch A



Wieso sinnvoll?

Betrachte das LGS $Ax = b$. Für eine rundungsfehler-behaftete rechte Seite $\tilde{b}$ finden wir die Näherungslösung $\tilde{x}$: $A\tilde{x} = \tilde{b}$

Wir definieren nun die Fehler $E_b = \|b - \tilde{b}\|_2$, $E_x = \|x - x^*\|_2$ (exakte Lösung)

Dann finden wir mit

$$(*) \quad \|b\|_2 = \|Ax\|_2 \leq \|A\|_{op} \|x\|_2$$

$$(\Delta) \quad E_x = \|x - \tilde{x}\|_2 = \|A^{-1}(b - \tilde{b})\|_2 \leq \|A^{-1}\|_{op} \underbrace{\|b - \tilde{b}\|_2}_{E_b}$$

Eine Abschätzung für den rel. Fehler $\frac{E_b}{\|b\|_2} \overset{(*)}{\geq} \frac{E_b}{\|A\|_2 \|x\|_2} \overset{(\Delta)}{\geq} \frac{1}{\underbrace{\|A\| \|A^{-1}\|}_{cond(A)}} \frac{E_x}{\|x\|_2}$

Damit gibt $cond(A)$ für LGS die schlimmst mögliche Fehlervergrößerung an

Dann:

$cond(A) \approx 1$: Stabile Lösung von LGS (kleine Rundungsfehler)

$cond(A) \gg 1$: Fehler von $\tilde{x}$ kann gross werden (schlecht konditioniert)

Nächste Woche: Zerlegungen