Woche 6

Donnerstag, 30. März 2023 14:55

Runge-Kutta Verfahren

RK-Verfahren sind die beliebtesten und mächtigsten allgemeinen Verfahren zum lösen von ODE's erster Ordnung. Die Idee hinter RK-Verfahren ist es die Funktion $f(y,t)$ an bestimmten Punkten auszuwerten und so eine Approximation der Lösung $y(t)$ zu erhalten, welche genauso gut ist wie eine Taylorentwicklung von hoher Ordnung ohne jedoch Ableitungen auszurechnen oder auszuwerten. RK-Verfahren sind so mächtig, da man anhand der Koeffizienten im numerischen Integrationsschema Konsistenz, Stabilität, Konvergenz, Ordnung, Energieerhaltung ablesen kann.

Geg.: AWP

$$\dot{y} = f(t,y) \qquad \Longrightarrow \text{ Wie finden wir } y(t)?$$
$$y(0) = y_0$$

Wir wollen die Lösung bei $t_1 = t_0 + h$ (Taylorentwicklung) finden, hierfür integrieren wir $\dot{y}$:

$$\underbrace{y(t_1)}_{=y_1} - \underbrace{y(t_0)}_{=y_0} \overset{\text{HDI}}{=} \int_{t_0}^{t_1} \dot{y}(t)dt \overset{\text{ODE}}{=} \int_{t_0}^{t_1} f(t, y(t))dt$$

$$\underset{\substack{t = t_0 + s\cdot h \\ dt = h ds \\ s = (t - t_0)/h \\ \text{(für Integrationsgrenzen)}}}{=} h \underbrace{\int_0^1 f(t_0 + sh, y(t_0 + sh))ds}_{(*)}$$

$(*)$ lösen wir via Quadratur mit s Knoten $\{c_i\}_{i=1}^s$ und Gewichten $\{b_i\}_{i=1}^s$

$$(*) = \sum_{i=1}^{s} b_i f(t_0 + c_i h, y(t_0 + hc_i))$$

Problem: $y(t_0 + hc_i)$ nicht bekannt. Wenn wir nun $|y(t_1) - y_1| = \mathcal{O}(h^{p+1})$ zu erreichen, approximieren wir $y(t_0 + hc_i)$ durch eine Methode mit $\mathcal{O}(h^p)$

Beispiel: QF = Mittelpunktregel

Wir approximieren y via explizitem Euler

(1) RK (1-Schritt): $y_1 = y_0 + h\int_0^1 f(t_0+sh, y(t_0+sh))\,ds$

(2) QF: $\int_0^1 f(t_0+sh, y(t_0+sh))\,ds \approx f(t_0+\tfrac{1}{2}h, y(t_0+\tfrac{1}{2}h))$

(3) eE: $y(t_0+\tfrac{1}{2}h) \approx y_0 + \tfrac{1}{2}hf(t_0,y_0)$

Dann:

$y_1 = y_0 + k f(t_0+\tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}hf(t_0,y_0))$ unser numerisches Schema

Notation: $k_1 := f(t_0,y_0)$

$k_2 := f(t_0+\tfrac{1}{2}h, y_0+\tfrac{1}{2}hk_1)$

$\Rightarrow y_1 = y_0 + h\cdot k_2$ (≙ Schritt) (explizite Mittelpunktsregel)

Allgemein: Für $b_i, a_{ij} \in \mathbb{R}$, $c_i := \sum_{j=1}^{s} a_{ij}$ definiert

$$k_i := f(t_0+hc_i, y_0 + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij}k_j)$$
$$y_1 = y_0 + h\sum_{i=1}^{s} b_i k_i \quad \text{ein } s\text{-stufiges RK verfahren}$$

Alle Informationen über das Schema sind in a_{ij}, b_i, c_i gespeichert (für Stabilitätsanalyse, etc. – s. später)

Man kann das RK-Verfahren auch als Butcher-Schema schreiben.

$$\begin{array}{c|c} \vec{c} & A \\ \hline & \vec{b}^T \end{array}$$

explizite Mittelpunktsregel

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

Falls A eine

- strikte untere Δ-Matrix $\Rightarrow$ explizites Verfahren
- untere Δ-Matrix $\Rightarrow$ diagonal-implizit
- sonst $\Rightarrow$ implizit