Woche 4

Freitag, 10. März 2023 19:36

Fouriertransformation und Filterung

Motivation:

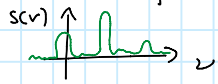
Als Physiker beobachten wir fast täglich Signale und wollen sie verstehen, bzw. vorhersagen können. Da wir nur das Signal $f(t)$ jedoch nur endlich (n mal) beobachten können stellt uns dies vor erhebliche Probleme. Ein erster Ansatz unser Signal $f(t)$ zu verstehen (vorhersagen zu können), wäre die Korrelation (lineare predictability (gegeben $f(t_1), f(t_2)$ und $t_1 < t_2$: Wie gut können wir $f(t_2)$ basierend auf $f(t_1)$ vorhersagen?)) zu betrachten. Dies ist jedoch mühsam und die Analyse wird schrecklich. Zum Glück gibt es schlaue Menschen die sich eine Lösung haben einfallen lassen: Fouriertransformation (und Energiespektren)

Idee: Wir wollen also unser Signal (in t) in eine Überlagerung von Wellen zerlegen. Die Frequenzen dieser Wellen werden später wichtig.

	Time domain	Frequency domain	
1)	continuous $f(t)$ $\int f(t)^2 < \infty$ (↑ verhindert divergierendes Signal)	continuous frequency domain	$f(t) = \int_{\mathbb{R}} F(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu$ $F(\nu) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{f(t) e^{-2\pi i \nu t}}_{\text{"Signal um Einheitskreis wickeln mit allen möglichen Frequenzen"}} d\nu$
2)	$\overset{\Delta}{\leftrightarrow}$ discrete $f(t)$	$-\frac{1}{2\Delta}$ … $\frac{1}{2\Delta}$ continuous, bounded frequency	$F(\nu) = \Delta \sum_{t \in \mathbb{Z}}' f_t e^{-2\pi i \nu t \Delta}$ ($\frac{1}{\Delta}$-periodisch) ↳ Frequenzen ununterscheidbar (i.e. $\nu \equiv \nu \pm k\Delta$, $k \in \mathbb{Z}$) $\Rightarrow$ nur noch Frequenzen in $[-\frac{1}{\Delta}, \frac{1}{\Delta}]$ $f_t = \int_{1/(2\Delta)}^{1/(2\Delta)} F(\nu) e^{2\pi i \nu t \Delta} d\nu$
3)	discrete $f(t)$, endliche Zeit	$-\frac{1}{2\Delta}$ … $\frac{1}{2\Delta}$ discrete, bounded frequency	$f_t = \frac{1}{n\Delta} \sum_{k=0}^{n-1}{}' F_k e^{2\pi i t\, k/n}$ ⊛ "Empirical Average" ⇝ Fourier ist erwartungstreu $F_k = \Delta \sum_{t=0}^{n-1}{}' f_t e^{-2\pi i t k/n}$ $\nu_k = \frac{k}{\Delta n}$

Jetzt wissen wir wie wir ein Signal durch Frequenzen darstellen können. Was bringt uns das nun für unsere Analyse? In der letzten Darstellung ⊛ haben wir gesehen, dass wir unser Signal gut (erwartungstreu) schätzen können, wenn wir die Fourierfrequenzen

(Eindeutigkeit der Darstellung ist ein netter Bonus, den wir gratis bekommen ☺)

ν_K kennen. Aber wie finden wir diese Frequenzen? Wir nutzen hierfür die spektrale Dichte $s(\nu)$. Plotten wir $s(\nu)$, so sieht sie meistens wie folgt aus: 

Intuitiv beschreibt $s(\nu)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte, welche angibt wie wahrscheinlich es ist, dass unsere Signaldecomposition die Frequenz ν benutzt. Kleine Werte korrespondieren zu Messfehlern. Also großer Wert $s(\nu) \iff \nu$ wichtig

Die spektrale Dichte ist $s(\nu) = |F(\nu)|^2$. Aber WTF sind Filter?

Mit einem Filter können wir $s(\nu)$ von einem Signal in einer vorhersehbaren Art und Weise modifizieren. Ein Beispiel für Filter ist der lineare Filter

$$Y_t = \sum_k a_K f_{t-K} \quad , \quad \sum_k |a_K|^2 < \infty$$