# Übungsstunde 8 - Why Disney, why?

Dienstag, 15. November 2022 18:11

**Frage:** Kann es $L_1 \notin \mathcal{L}_{RE}$ und $L_2 \in \mathcal{L}_{RE}$ geben, s.d. $L_1 \leq_R L_2$? JA, z.B. $L_2 = (L_{diag})^c$ und $L_1 = L_{diag}$

⚠ Zu jeder NTM M existiert eine TM M' s.d. $L(M) = L(M')$. Wenn wir also $L \in \mathcal{L}_{RE}$ zeigen sollen, können wir einfach eine NTM angeben! Dies ist häufig einfacher als eine TM zu finden

**Aufgabe:** Sei $L_{all} = \{ Kod(M) \mid L(M) = \Sigma^*_{bool} \}$. Dann ist $L_{all} \notin \mathcal{L}_R$

**Lösung:** Wir benutzen den Satz von Rice. (üblicherweise steht in der Aufgabe "sie dürfen alle in der VL gezeigten Resultate verwenden) Wir zeigen also, dass $L_{all}$ ein nicht triviales Entscheidungsproblem ist. Bemerke zunächst, dass $L_{all} \subseteq KodTM$. Wir prüfen die Bedingungen:

i) Die TM M welche seine Eingabe löscht und dann akzeptiert ist in $L_{all}$ $\Rightarrow$ $L_{all} \neq \emptyset$

ii) Sei M eine TM s.d. $\lambda \notin L(M)$ $\Rightarrow$ $Kod(M) \notin L_{all}$ $\Rightarrow$ $L_{all} \neq KodTM$

iii) Per Def. sind alle TM, welche $\Sigma^*_{bool}$ akzeptieren in $L_{all}$ enthalten, also gilt

$$L(A) = L(B) \Rightarrow [Kod(A) \in L_{all} \Leftrightarrow Kod(B) \in L_{all}]$$

Nach Rice gilt also: $L_{all} \notin \mathcal{L}_R$ $\square$

**Aufgabe:** Alternativ Lösung zu $L^c_\infty \in \mathcal{L}_{RE}$

**Lösung:** Wir benützen ein Diagonalisierungsargument und konstruieren eine det. TM A s.d. $L(A) = L^c_\infty$. A arbeitet auf einer Eingabe w wie folgt

1. A prüft ob $w \neq Kod(M)$ für eine TM M. Dann akzeptiert A.
2. $w = Kod(M)$. A konstruiert systematisch (wie Diagonale) alle Paare $(i,j) \in \mathbb{N}^2_{>0}$. Für jedes Paar $(i,j)$ generiert A das kanonisch i-te Wort $w_i \in \{0,1\}^*$ und simuliert j Berechnungs-schritte von M auf $w_i$. Falls für ein Paar $(k,l)$ die TM $w_k$ in $l$ Schritten akzeptiert, so akzept. M und A akzeptiert w. Ansonsten akzeptiert A die Eingabe w nicht, da A $\infty$-Lange arbeitet $\square$

Es ist trivialerweise offensichtlich, dass $L(A) = L^c_\infty$

**Beh.:** $L = \{ Kod(M_1)\#Kod(M_2)\#k \mid M_1, M_2$ TM über $\Sigma_i$ und $\Sigma_i^k \not\subseteq L(M_1) \cup L(M_2)\} \notin \mathcal{L}_{RE}$.

**Beweis:** Wir benutzen, dass $L^c \in \mathcal{L}_{RE}$. Dies kann man via eines Diagonalisierungsarguments ähnlich zur vorigen Aufgabe zeigen und ist dem emsigen Leser überlassen (Sessionsprüfung HS2020 A4).

Wir zeigen $L_u^c \leq_{EE} L$, da dann $L_u^c \leq_R L$ und $L_u^c \notin \mathcal{L}_{RE}$ gilt. Wir beschreiben eine TM $S$, die eine Funktion $f_S : \{0,1,\#\}^* \longrightarrow (\{0,1,\#\} \cup \mathbb{N})^*$ berechnet, s.d.

$$x \in L_u^c \iff f_S(x) \in L$$

Sei $x \in \{0,1,\#\}^*$ die Eingabe. $S$ prüft ob $x = Kod(M)\#w$ für eine TM $M$ und ein $w \in \{0,1\}^*$.
Falls nicht, so wird $f_S(x) = Kod(M_\emptyset)\#Kod(M_\emptyset)\#1$ ausgegeben, wobei $M_\emptyset$ eine TM s.d. $L(M_\emptyset) = \emptyset$.
Falls doch, so wird $f_S(x) = Kod(M_w)\#Kod(M_w)\#1$ ausgegeben, wobei $M_w$ eine TM ist, welche ihre eigene Eingabe ignoriert, $M$ auf $w$ simuliert und die Ausgabe übernimmt.

<u>Beh.:</u> $x \in L_u^c \iff f_S(x) \in L$

<u>Beweis:</u> <u>Fall 1:</u> $w \notin KodTM \cdot \{\#\} \cdot \{0,1\}^*$ (i.e. $w \in L_u^c$) $\Rightarrow f_S(w) = Kod(M_\emptyset)\#Kod(M_\emptyset)\#1 \in L$, da

$$\Sigma_i \not\subseteq \emptyset = \emptyset \cup \emptyset$$

<u>Fall 2:</u> $x = Kod(M)\#w$ für $Kod(M) \in KodTM$, $w \in \{0,1\}^*$.

$$x \in L_u^c \iff w \notin L(M) \iff L(M_w) = \emptyset \iff \Sigma_i \not\subseteq L(M_w) \cup L(M_w)$$

$$\iff f_S(x) \in L \qquad \square$$

Da für jede Sprache $\tilde{L}$: $\tilde{L}, \tilde{L}^c \in \mathcal{L}_{RE} \iff \tilde{L} \in \mathcal{L}_R$ gilt, folgt $L \notin \mathcal{L}_{RE}$ $\square$

$NTIME(f) = \{ L(M) \mid M \text{ NMTM mit } Time_M(n) \in \mathcal{O}(f(n)) \}$

Beh.: $NTIME(f)$ ist abgeschlossen unter Vereinigung $(L_1, L_2 \in NTIME(f) \Rightarrow L_1 \cup L_2 \in NTIME(f))$

Beweis: NMTM muss halten (Wenn nicht sicher ob 2 NMTM halten → Parallel laufen lassen)

$M_1$ NMTM s.d. $L(M_1) = L_1$ mit $k_1$-Bändern & $Time_{M_1}(w_1) \in \mathcal{O}(f(n))$, $|w_1| = n$

$M_2$ NMTM s.d. $L(M_2) = M_2$ mit $k_2$-Bändern & $Time_{M_2}(w_2) \in \mathcal{O}(f(n))$, $|w_2| = n$

Konstruiere nun eine NMTM $M$ auf $(k_1 + k_2 + 1)$-Bändern für $L = L_1 \cup L_2$

$M$ arbeitet wie folgt: $M$ simuliert $M_1$ auf Band 2 bis $k_1 + 1$ (1. Band ist Eingabeband)

(Parallele Simulation) $M$ simuliert $M_2$, auf Band $k_1 + 2$ bis $k_1 + k_2 + 1$

$M$ akzeptiert $\Leftrightarrow$ $M_1$ oder $M_2$ (oder beide) akzeptiert

$\exists$ akzeptierende Berechnung auf $M$ gdw. $\exists$ (akz. Berechnung in $M_1$ oder $M_2$)

Zeitkomplexität: $M$ kopiert Input auf jeweils das erste Band von $M_1$ & $M_2$. Danach stellt $M$ die Köpfe von $M_1$ & $M_2$ auf den Anfang.

Da $|Input| = n$ ist dies in $\mathcal{O}(2n) = \mathcal{O}(n)$ möglich.

Eine akzeptierende Berechnung von $M$ benötigt nicht mehr Zeit als "Zeit zum Kopieren der Eingabe" + "Zeit der kürzesten Berechnung von $M_1$ oder $M_2$"

$Time_M(w) \in \mathcal{O}(n) + \min\{ Time_{M_1}(w), Time_{M_2}(w) \} \in \mathcal{O}(f(n))$

$\Rightarrow L = L_1 \cup L_2 \in NTIME(f(n))$. $\square$