Übungsstunde 4

Sonntag, 16. Oktober 2022 20:58

Midterm: Wann? 03.11.2022 von 16-18 Uhr

Wo? Irgendwo im HG

Prüfungsstoff sind die ersten 5 Serien (alles vor Turing)

Welche Punkte zählen? Die der ersten 5 Serien

Nichtregularitätsbeweise:

Mächtigkeit: Lemma 3.3 > Pumping-Lemma > Kolmogorov

Aufgabe: Zeige, dass $L_1 = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid w \text{ enthält das Teilwort ab gleich oft wie ba}\}$ nicht regulär ist.

Beweis: Wir verwenden Lemma 3.3 und zeigen die Aussage per Widerspruch.

Angenommen L_1 sei regulär. Dann existiert ein EA $A = (Q, \{a,b,c\}, \delta, q_0, F\}$ mit $L(A) = L_1$.

Wie beim Pumping-Lemma steht und fällt der Beweis durch die Wahl der Wörter.

Betrachte die Wörter $(abc, (abc)^2, \dots, (abc)^{|Q|+1})$. Da die Menge der Wörter größer ist als die Anzahl der Zustände $|Q|$ existieren nach dem Schubfachprinzip $i,j \in \{1,\dots,|Q|+1\}$ mit $i<j$ s.d. $\hat{\delta}(q_0, (abc)^i) = \hat{\delta}(q_0, (abc)^j)$. Nach Lemma 3.3. muss nun $\forall z \in \{a,b,c\}^*$:

$$(abc)^i z \in L_1 \iff (abc)^j z \in L_1 \text{ gelten.}$$

Wähle $z = (bac)^i$.

- $(abc)^i (bac)^i \in L_1$
- $(abc)^j (bac)^i \notin L_1$, da $j > i$ ↯

Somit war unsere Annahme falsch und L_1 ist nicht regulär. $\square$

Aufgabe: Zeige, dass $L_2 = \{0^{\binom{2n}{n}} \mid n \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär ist.

Beweis: Wir verwenden die Methode der KK.

! Kolmogorov kann nur über dem Alphabet Σ_{bool} verwendet werden, also z.b. nicht über $\{0,1,\#\}$!

Beweis per Widerspruch. Angenommen L_2 sei regulär. Wähle $x = 0^{\binom{2n}{n}}$. Betrachte die Suffixsprache $L_x = \{y \in \{0\}^* \mid xy \in L_2\}$. Setze $m := \binom{2(n+1)}{n+1} - \binom{2n}{n}$. Dann ist das zweite Wort in L_x 0^m. Nach Satz 3.1 existiert eine von m & n unabhängige Konstante c, s.d. $K(0^m) \leq c + \lceil \log_2(2+1) \rceil \leq c + 2 =: d$

Da es nur endlich viele Programme mit binärer Länge $\leq d$ $\left(\sum_{i=1}^{d} 2^i = 2^{d+1} - 2\right)$ gibt, aber ∞-viele Wörter der Form 0^m, ist dies ein Widerspruch. Also ist L_2 nicht regulär. $\square$

Minimaler Automat:

Aufgabe: Jeder EA der $L_3 = \{w \in \{a,b\}^* \mid w$ enthält das Teilwort ab gleich oft wie ba$\}$ akzeptiert, mindestens 5 Zustände hat.

Beweis: Wir verwenden Lemma 3.3. Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein EA mit $L(M) = L_3$.
Seien $x, y \in \{a,b\}^*$ $x \neq y$, s.d. $\hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, y)$. Dann gilt $\forall z \in \{a,b\}^*$:

$$xz \in L(M) \iff yz \in L(M)$$

Wir konstruieren nun 5 paarweise verschiedene Wörter $w_i \in \{a,b\}^*$, $1 \leq i \leq 5$, s.d. für ein $z \in \{a,b\}^*$ folgendes gilt: $\neg(w_i z \in L(M) \iff w_j z \in L(M))$ (I) für $1 \leq i < j \leq 5$.
Nach obigem Lemma müssen dann alle w_i, $1 \leq i \leq 5$ in verschiedenen Startzuständen liegen.
(i.e. $\hat{\delta}(q_0, w_i) \neq \hat{\delta}(q_0, w_j)$, $1 \leq i < j \leq 5$).

Wähle $w_1 = \lambda$, $w_2 = a$, $w_3 = b$, $w_4 = ab$, $w_5 = ba$

	w_2	w_3	w_4	w_5
w_1	b	a	λ	λ
w_2	/	ba	λ	λ
w_3	/	/	λ	λ
w_4	/	/	/	a

Einträge sind z

Damit haben wir 5 paarweise verschiedene Wörter mit Eigenschaft (I), woraus folgt, dass M mindestens 5 Zustände hat.