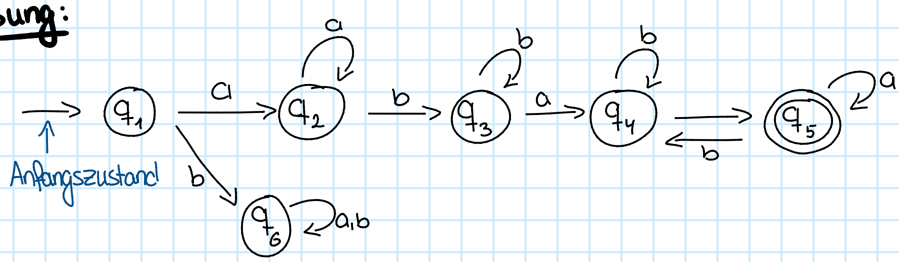
Übungsstunde 3 - Revenge of the automatos

Freitag, 7. Oktober 2022 15:38

Aufgabe: Entwerfe einen endlichen Automaten für die Sprache $L_0 = \{axa \mid x \in \{a,b\}^* \text{ und } ba$ ist Teilwort von $x\}$ und gebe für jeden Zustand q die Klasse $Kl[q]$ an

Lösung:



⚠ Egal welchen Buchstaben wir in einem Zustand lesen. Der nächste Zustand muss definiert sein!

Klassen: $Kl[q_6] = \{by \mid y \in \{a,b\}^*\}$

$Kl[q_5] = L_0$

$Kl[q_1] = \{\lambda\}$

$Kl[q_2] = \{a\}^+$

$Kl[q_3] = \{a^i b^j \mid i,j \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$

$Kl[q_4] = \{a,b\}^* - \left(\bigcup_{i=1}^{3} Kl[q_i] \cup Kl[q_5] \cup Kl[q_6] \right)$ $\square$

Soweit so gut, aber was machen wir nun, wenn die gegebene Sprache nicht "schön" ist?

Ganz einfach: Wir versuchen die Bedingung umzuformulieren!

Beispiel: $L = \{ w \in \{0,1\}^* \mid (2 \cdot |w|_1)^{|w|_0} \equiv 0 \mod 2 \}$

Setze $L := |w|_0$, $k := 2|w|_1$ Wir betrachten nun zwei Fälle und vereinfachen so die Beschreibung der Sprache: Wir nehmen an: $0^0 := 1$

1. $L = 0 \Rightarrow k^L = k^0 = 1 \not\equiv 0 \mod 1$ $(\notin L)$
2. $L \geq 1$. Claim: $k^L \equiv 0 \mod 2$ $(\in L)$

   Proof: Note: k is even $\Rightarrow k^L = (2|w|_1)^L = 2^L \cdot |w|_1^L \equiv 0 \mod 2$ $\square$

Also können wir L wie folgt umschreiben:

$L = \{ w \in \{a,b\}^* \mid |w|_0 \geq 1 \}$

Aufgabe: Konstruktion eines Produktautomaten

$L = \{ w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a \mod 3 = |w| \mod 3$ oder (w enthält das Teilwort ab und w endet mit b)$\}$

Lösung: Wir schreiben betrachten zunächst die einzelnen Teilsprachen seperat und führen später zusammen.

$L_1 = \{ w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a \bmod 3 = |w| \bmod 3 \}$

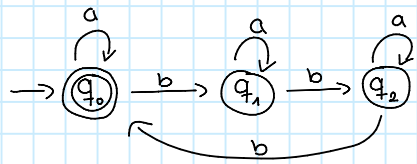
$\quad = \{ \quad '' \quad \mid \cancel{|w|_a} \bmod 3 = (\cancel{|w|_a} + |w|_b) \bmod 3 \}$

$\quad = \{ \quad '' \quad \mid |w|_b \bmod 3 = 0 \}$

$L_2 = \{ \quad '' \quad \mid$ w enthält das Teilwort ab und w endet mit b $\}$

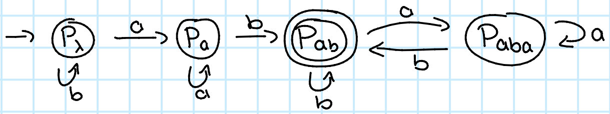
$\Rightarrow \; L = L_1 \cup L_2$

Automat für L_1:



$Kl[q_i] = \{ w \in \{a,b\}^* \mid |w|_b \bmod 3 = i \}$

Automat für L_2:



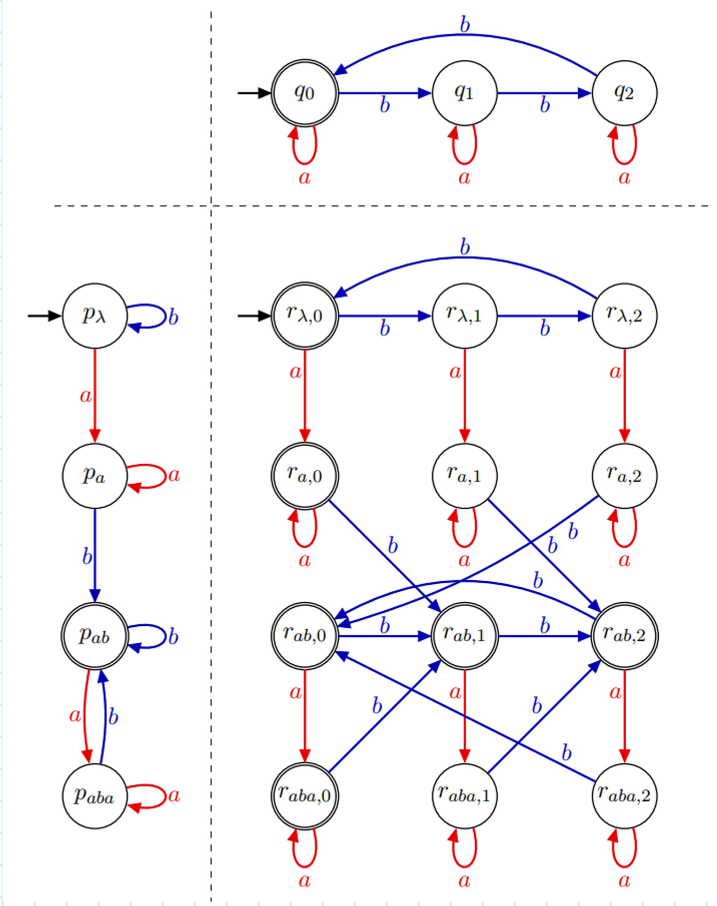
$Kl[p_\lambda] = \{b\}^*$

$Kl[p_a] = \{ xay \mid x \in \{b\}^*, \; y \in \{a\}^* \}$

$Kl[p_{ab}] = L_2$

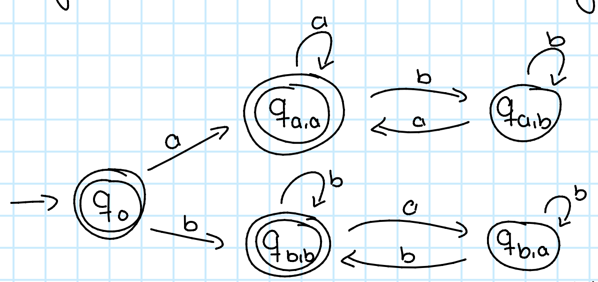
$Kl[p_{aba}] = \{a,b\}^* - \bigcup_{z \in \{\lambda, a, ab\}} Kl[p_z]$

Den Produktautomaten erhält man nun durchs Kreuzprodukt: $r_{x,y} = \langle p_x, q_y \rangle$



Aufgabe: Entwerfe einen endlichen Automaten für die Sprache $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w$ enthält das Teilwort ab gleich oft wie das Teilwort ba$\}$ und begründe informell dessen Korrektheit.

Lösung:



Beim Lesen der Buchstaben von links nach rechts kommt ab genau für jeden Wechsel von a nach b als Teilwort vor. Analog kommt ba genau einmal für jeden Wechsel von b nach a vor. Somit kommen ab und ba genau dann gleich oft in w als Teilwort vor, wenn w entweder das leere Wort ist oder w mit demselben Buchstaben beginnt mit dem es endet. Dies hält insbesondere für $w=a$ und $w=b$.

Wenn w mit a beginnt, prüft der Automat in den beiden oberen Zuständen, ob der zuletzt gelesene Buchstaben mit dem zuerst gelesenen übereinstimmt. Analog für $w=by$, $y \in \{a,b\}^*$.

Hinweis: $|x|^2 \bmod (|x|-2) = \begin{cases} 1, & |x| = 5 \\ 4, & |x| \geq 7 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Let's pump

Aufgabe: Zeige mittels dem Pumping-Lemma, dass $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w|_0 \neq |w|_1\}$ nicht regulär ist.

Beweis: Per Widerspruch. Angenommen L sei regulär. Nach dem PL $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.d.

$\forall w \in \{0,1\}^*$ mit $|w| \geq n_0$ $\exists x,y,z \in \{0,1\}^*$ s.d. $w = yxz$ und

i) $|yx| \leq n_0$

ii) $|x| \geq 1$

iii) $M := \{yx^kz \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq L$ oder $M \cap L = \emptyset$.

Wir wählen das Wort $w = 0^{n_0}1^{n_0}$. Da $|w| = 2n_0 \geq n_0$ $\exists x,y,z \in \{0,1\}^*$ s.d.

wegen i) $y = 0^L$, $x = 0^m$ mit $L, m \in \mathbb{N}$ und $L+m \leq n_0$, also insbesondere

wegen ii) $m \geq 1$. Also $z = 0^{n_0-(L+m)}1^{n_0}$.

Insbesondere ist dies die einzig mögliche Zerlegung von w, welche die Voraussetzungen des PL erfüllt! Wir zeigen nun, dass iii) nicht erfüllt ist.

Fall 1: $k=1$. $yxz = 0^L 0^m 0^{n_0-(m-L)} 1^{n_0} = 0^{n_0}1^{n_0} \notin L$

Fall 2: $k=0$. $yx^0z = yz = 0^l 0^{n_0-(l+m)} 1^{n_0} = 0^{n_0-m} 1^{n_0} \in L$, da $1 \le m \le n_0$ ↯

Dies ist ein Widerspruch zu iii), also ist L nicht regulär. $\square$

Musik Empfehlung der Woche:

- Mood - RAF Camora Remix von Makar
- Rebellion (Symphonie Remix) von Neelix
- 6am in Dubai von Russ Millions, YV & Buni

Some Gym motivation on YT: Monster among men - das Freak - Markus Ruhl motivation