Übungsstunde 10

Dienstag, 29. November 2022 16:33

Es gilt $NP \subseteq \mathcal{L}_R \subseteq \mathcal{L}_{RE}$.

Um $\in NP$ reicht es eine NTM anzugeben, welche in polynomieller Laufzeit das Problem löst.

Def.: Sei $C = (L_1 \vee \ldots \vee L_k)$ eine Klausel über Variablen von X. C ist monoton, wenn $\{L_1, \ldots, L_k\} \subseteq X$ oder $\{L_1, \ldots, L_k\} \subseteq \{\bar{x} \mid x \in X\} = \bar{X}$. Eine KNF heisst monoton, wenn alle Klauseln monoton sind.

Beh.: $\text{MonoSAT} = \{\Phi \in \text{SAT} \mid \Phi \text{ monoton}\}$ ist NP-vollständig

Beweis: $\in NP$ klar, da $\text{SAT} \in NP$

z.z.: $\text{SAT} \leq_p \text{MonoSAT}$

Sei $F = C_1 \wedge \ldots \wedge C_m$ eine KNF über $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, wobei $C_i = L_{i_1} \vee \ldots \vee L_{i_k}$ mit $L_{i_j} \in X \cup \bar{X}$. Wir konstruieren Φ aus F.

TRICK: $(x_i \vee y_i) \wedge (\bar{x}_i \vee \bar{y}_i) \iff x_i$ XOR y_i positiv / negativ. "Alibi-Monotonität"

Sei $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ neue Variablen $(Y \cap X = \emptyset)$. Wir ersetzen $\bar{x}_i$ mit y_i und fügen $\forall i$: $\underbrace{(x_i \vee y_i) \wedge (\bar{x}_i \vee \bar{y}_i)}^{\text{Erfüllbarkeitsbedingung}}$ zusätzlich ein.

Die Konstruktion ist sicherlich in poly. LZ möglich.

Beh.: $F \in \text{SAT} \iff \Phi \in \text{MonoSAT}$

Beweis:

"$\Rightarrow$" Sei α eine erfüllende Belegung für F. Dann ist $\beta(x_i) = \alpha(x_i)$ und $\beta(y_i) = 1 - \alpha(x_i)$ "$= \bar{x}_i$" $\forall i$ eine erfüllende Belegung für Φ. Da Φ klar monoton ist, gilt $\Phi \in \text{MonoSAT}$

"$\Leftarrow$" Sei β erfüllend für Φ. Für jedes i ist $(x_i \vee y_i) \wedge (\bar{x}_i \vee \bar{y}_i)$ erfüllt gdw. $\beta(x_i) = 1 - \beta(y_i)$. Definiere $\alpha(x_i) := \beta(x_i)$. Da in Φ jede Klausel durch β erfüllt wird, wird die entsprechende Klausel in F mit $\bar{x}_i$ statt y_i durch α erfüllt. $\square$ $\square$

Beh.: Vertex Cover ist NP vollständig.

Beweis: Angenommen Independent Set ist NP complete, Ind.Set = ist in einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ein kantenloser Teilgraph, also $V' \subseteq V$, s.d. $\forall v, w \in V'$: $\{v, w\} \notin E$.

Independent Set $= \{(G, k) \mid G$ hat ein Ind. Set der Größe $\geq k\}$ (Komplement zu VC)

- Vertex Cover $\in NP$: Sei (G, k) eine Eingabe, welche in Vertex Cover liegt. Dann gibt es k' Knoten V' in G, welche ein Vertex Cover bilden. Klar: $|V'| \leq |G|$. Gegeben V', so können wir alle Kanten in G durchlaufen und prüfen, ob jede davon min. einen Endpunkt in V' hat. Dies hat Laufzeit $|E| \cdot |V'|$, was polynomiell in $|G|$ ist.

- Independent Set $\leq_p$ Vertex Cover

  Sei (G, k) eine Eingabe für Independent Set. Dann ist (G', k') eine Eingabe für Vertex Cover, wobei $G' = G$ und $k' = n - k$. $(n = |V|)$

  Beh.: $(G,k) \in$ Independent Set $\Leftrightarrow$ $(G', k') \in$ VertexCover

  Beweis: "$\Rightarrow$" G hat ein Ind. Set S, $|S| = k$. Dann ist $V' = V \setminus S$ ein VC, da keine Kante in G beide Eckpunkte in S haben kann

  "$\Leftarrow$" G' hat ein VC V', $|V'| = n - k$. Dann gibt es keine Kante in $V \setminus V' =: S$, $|S| = k$ $\square$

  Da die Konstruktion in poly. LZ möglich ist, folgt die Behauptung. $\square$

Beh.: Sei

Undirected Hamilton Cycle (UHC) $= \{ G = (V, E) \mid$ Gibt es einen Kreis, der jeden Knoten in G genau einmal besucht ? $\}$

Directed Hamilton Cycle (DHC) $= \{ D = (V, A) \mid$ " gerichteten Kreis, " $\}$

gerichteter Graph

Dann ist UHC $\leq_p$ DHC

Beweis: Sei G eine Eingabe für UHC. Wir konstruieren G' wie folgt:

$V(G') = V(G)$. Für jede Kante $\{v, w\} \in E(G)$ fügen wir die gerichteten Kanten (v, w) und (w, v) in $A = E(G')$ ein. Die Konstruktion ist sicher in poly. LZ in $|G|$ möglich.

"$\Rightarrow$" Angenommen $(u_1, \dots, u_n)$ ist ein UHC in G. So ist dies auch ein DHC.

"$\Leftarrow$" Jeder DHC ist auch ein UHC. $\square$ $\square$

Song-Empfehlungen:

- Hear the sound - Franck
- Heute Nacht - Maddix
- So Druff - KNTRLVRLST

- E3SAT $\equiv$ Alle KNF mit genau drei Literalen paarweise unterschiedlicher Variablen pro Klausel

Beh.: 3SAT $\leq_p$ E3SAT

Beweis: Sei ϕ eine Eingabe für 3 SAT, also $\phi = C_1 \wedge \dots \wedge C_m$ über $X = \{x_1, \dots, x_n\}$.

O.B.d.A. enthält jede Klausel von ϕ jede Variable höchstens einmal.

Konstruiere ψ wie folgt: Alle Klauseln von ϕ, die bereits 3 Variablen enthalten, bleiben unverändert. ①

② Falls $C_i = (L_{i,1} \vee L_{i,2})$, ersetze sie durch $C_{i,1} = (L_{i,1} \vee L_{i,2} \vee y_i)$ und $C_{i,2} = (L_{i,1} \vee L_{i,2} \vee \bar{y}_i)$ wobei y_i eine neue Variable ist, die sonst nirgends in ψ vorkommt.

③ Falls $C_i = L_i$ => $C_{i,1} = (L_i \vee y_{i,1} \vee y_{i,2})$, $C_{i,2} = (L_i \vee y_{i,1} \vee \bar{y}_{i,2})$, $C_{i,3} = (L_{i,1} \vee \bar{y}_{i,1} \vee y_{i,2})$ und $C_{i,4} = (L_i \vee \bar{y}_{i,1} \vee \bar{y}_{i,2})$, wobei $y_{i,1}$ und $y_{i,2}$ zwei neue Variablen sind, die sonst nirgends in ψ vorkommen.

Offenbar ist diese Konstruktion in poly. Zeit durchführbar und die ZSTBED. von E3SAT gelten.

Beh.: ϕ erfüllbar <=> ψ erfüllbar

Beweis: "=>" Sei α eine erfüllende Belegung für ϕ. Dann setzt α mindestens ein Literal in jeder der Klauseln $C_1, \dots, C_m$ auf 1. Damit ist aber auch ψ erfüllt für eine beliebige Erweiterung von α

"<=" Sei β eine erfüllende Belegung von ψ. Dann werden alle Klauseln in ψ von β erfüllt.

Wir zeigen: $\beta|_X$ erfüllt ϕ. Falls wir in ① sind, so erfüllt β diese sicherlich.

Falls wir in ③ sind, so kann ③ nur erfüllt sein, wenn C_i erfüllt wird (wegen $C_{i,4}$).

Also erfüllt β auch C_i.

Falls wir in ② sind, so muss auch C_i von β erfüllt werden, da y_i und $\bar{y}_i$ vorkommen

Somit erfüllt β also alle Klauseln von ϕ. $\square$